Acoustique

Les conditions aux limites

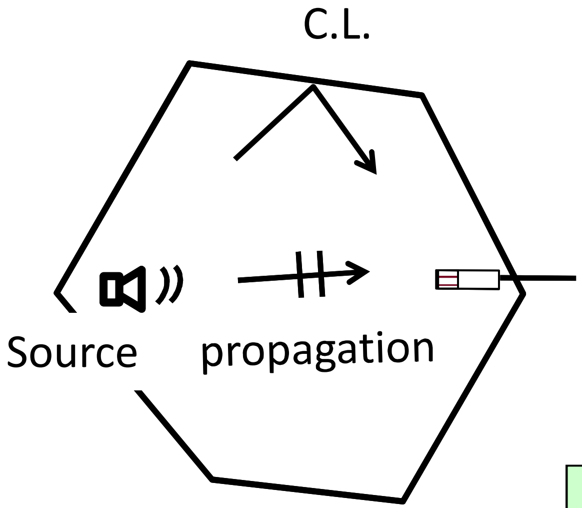
Les Conditions aux limites
Réflexion, Absorption
Notion d'Impédance

Gilles.robert@ec-lyon.fr

ECL2022Ac5CondLimitesW

LMFA
LABEX CELYA UNIVERSITÉ DE LYON
UNIVERSITÉ DE LYON
ÉCOLE CENTRALE LYON

Le problème acoustique



champ acoustique

- sources
- éq. onde
- CL

$$\Delta p - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \text{source}$$

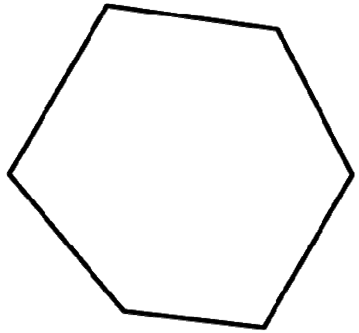
Équation différentielle du $2^{\text{ième}}$ ordre en espace

Conditions aux limites

On cherche une condition sur p sur toute la frontière du domaine

Gilles Robert

Plan du chapitre



Aux limites du milieu, à l’interface avec l’extérieur, le milieu n’est plus continu. Nous introduirons les expressions des lois de conservation qui traduisent les grands principes.

On déduira de ces expressions des conditions en termes de pression et de vitesse.

On étudiera ensuite la réflexion sur une surface rigide et à l’interface entre 2 fluides.

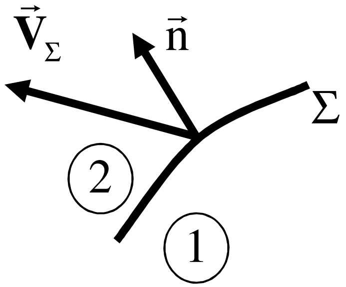
Enfin, pour traiter les matériaux absorbants, on introduira un modèle linéaire basé sur la notion d’impédance.

ÉCOLE CENTRALE LYON

Equation de saut, C.L. naturelles

1. Que nous apporte la MMC ?

Surface de discontinuité → Nouvelles formes des équations de conservation



masse : $\left\| \rho\left(\vec{V} - \vec{V}_\Sigma\right)\cdot\vec{n} \right\| = 0 \longrightarrow \rho_2\left(\vec{V}_2 - \vec{V}_\Sigma\right).\vec{n} - \rho_1\left(\vec{V}_1 - \vec{V}_\Sigma\right).\vec{n} = 0$

qté mvt : $\left\| \rho V_i\left(\vec{V} - \vec{V}_\Sigma\right)\cdot\vec{n} - \overline{\overline{\sigma}} \circ \vec{n} \right\| = 0$

énergie : $\left\| \rho\left(u + \frac{V^2}{2}\right)\left(\vec{V} - \vec{V}_\Sigma\right)\cdot\vec{n} \right\| - \left\| \vec{V}\cdot\vec{T} \right\| + \left\| \vec{q} \right\|\cdot\vec{n} = 0$

avec $\|\xi\| = \text{saut de } \xi = \xi_2 - \xi_1$

Suivant le type d'interface Σ, ces équations se simplifient et doivent être complétées

Interface entre 2 milieux non miscibles

La matière ne peut pas traverser la surface

$\vec{V}.\vec{n} = \vec{V}_\Sigma.\vec{n}$

→

$\vec{V}_1.\vec{n} = \vec{V}_\Sigma.\vec{n} = \vec{V}_2.\vec{n}$

$\overline{\overline{\sigma}}_1 \circ \vec{n} = \overline{\overline{\sigma}}_2 \circ \vec{n}$

$\vec{T}\cdot\left\|\vec{V}\right\| = \left\|\vec{q}\right\|\cdot\vec{n}$

- Continuité des vitesses normales
- Continuité de la contrainte
- La puissance des forces de frottement se retrouve en chaleur

Interface fluide - fluide

Fluide visqueux
adhérence

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{\mathbf{V}}_1 = \vec{\mathbf{V}}_2 \\ \underline{\underline{\sigma}}_1 \circ \vec{\mathbf{n}} = \underline{\underline{\sigma}}_2 \circ \vec{\mathbf{n}} \\ \left\|\vec{\mathbf{q}}\right\| \cdot \vec{\mathbf{n}} = 0 \end{array}}$$

Continuité des vitesses
Contrainte (idem)
énergie (pas glissement)

Fluide parfait
Glissement , $\sigma_{ij}=p\delta_i$

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{\mathbf{V}}_1 . \vec{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{V}}_2 . \vec{\mathbf{n}} \\ p_1 = p_2 \\ \left\|\vec{\mathbf{q}}\right\| \cdot \vec{\mathbf{n}} = 0 \end{array}}$$

Continuité des vitesses normales
continuité des pressions
énergie (pas de frottement)

Interface fluide - solide

Si le fluide est visqueux
adhérence

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{\mathbf{V}}_{\text{fluide}} = \vec{\mathbf{V}}_{\text{solide}} \\ \underline{\underline{\sigma}}_{\text{fluide}} \circ \vec{\mathbf{n}} = \underline{\underline{\sigma}}_{\text{solide}} \circ \vec{\mathbf{n}} \end{array}}$$

Si le fluide est parfait
Glissement sans frottement

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{\mathbf{V}}_{\text{fluide}} \cdot \vec{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{V}}_{\text{solide}} \cdot \vec{\mathbf{n}} \\ -p_{\text{fluide}} \circ \vec{\mathbf{n}} = \underline{\underline{\sigma}}_{\text{solide}} \circ \vec{\mathbf{n}} \end{array}}$$

Conditions aux limites : On retiendra

Les grands principes, les équations de conservation, imposent des conditions entre les champs de vitesses, de contraintes et même de flux de chaleur aux discontinuités du milieu. Ces conditions sont dites « naturelles ».

Toutes formulations de conditions aux limites doivent au minima intégrer ces conditions.

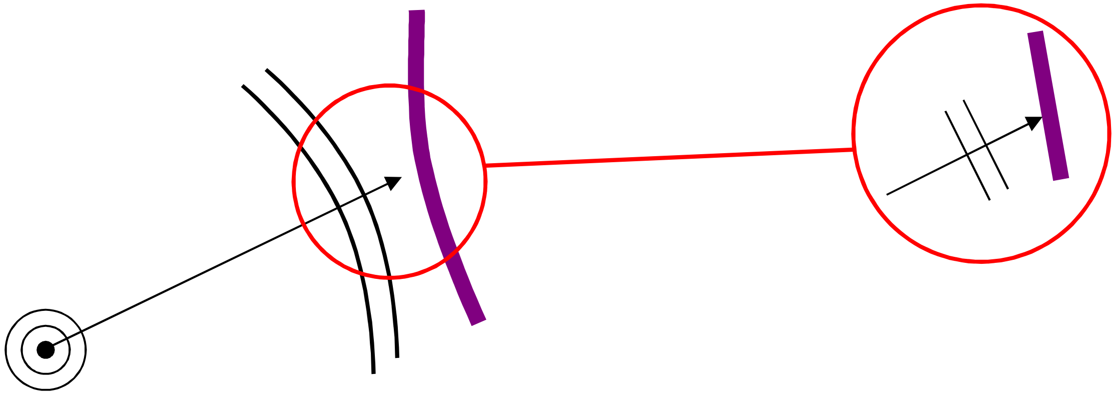
Suivant les configurations, ces conditions doivent être complétées par des lois d'interface.

En général, pour les problèmes acoustiques classiques (linéaire, fluide parfait), il apparait deux conditions, une portant sur la vitesse normale et l'autre sur la contrainte.

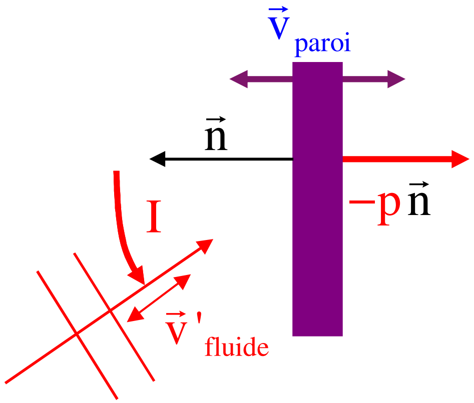
ÉCOLE CENTRALE LYON
Gilles Robert

Un problème de base
Réflexion d'une onde plane sur une paroi

Appliquons ces résultats pour une onde plane qui arrive sur une paroi



Interaction
Onde plane - Paroi plane



$$\overline{\overline{\sigma}}_{paroi} \circ \vec{n} = -p\,\vec{n}$$

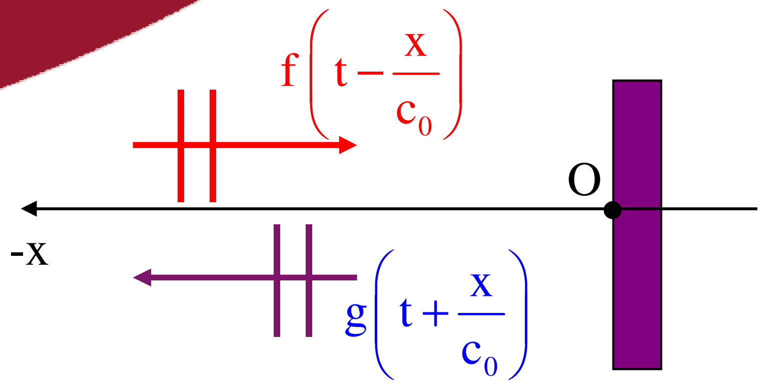
$$\vec{v}_{paroi} \cdot \vec{n} = \vec{v}\,'_{fluide} \cdot \vec{n} = v' \cos I$$

Pour intégrer l'équation d'onde, on cherche 1 condition au limite sur toutes les frontières.
On ne connaît pas σ_{paroi}
Il faut donc connaître le mouvement de la paroi

ÉCOLE CENTRALE LYON

Gilles Robert

2. Réflexion sur une paroi rigide: $v_{paroi}=0$



(H) **Incidence normale**

Compte tenu de la symétrie du problème,
On cherche une solution 1D: onde plane

$$\phi(x;t)=f\left(t-\frac{x}{c_0}\right)+g\left(t+\frac{x}{c_0}\right)$$

(H) **Onde Plane monochromatique**

$$\tilde{\phi}(x;t)=\tilde{\phi}_i e^{i(\omega t-kx)}+\tilde{\phi}_r e^{i(\omega t+kx)}$$

$$\tilde{u}=\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial x}=-ik\tilde{\phi}_i e^{i(\omega t-kx)}+ik\tilde{\phi}_r e^{i(\omega t+kx)}$$

(C.L.)

La paroi est rigide. $V_{paroi}=0$

$$x=0 \Rightarrow k\tilde{\phi}_r=k\tilde{\phi}_i=A$$

$$\boxed{\tilde{\phi}(x;t)=\frac{A}{k}e^{i(\omega t-kx)}+\frac{A}{k}e^{i(\omega t+kx)}}$$

1. L'amplitude de l'onde réfléchie est identique à celle de l'onde incidente (pas de perte d'énergie)
2. Il n'y a pas de déphasage lors de la réflexion

Réflexion sur une paroi rigide: $v_{paroi}=0$ (suite)

$$\tilde{\phi}(x;t)=\frac{A}{k}e^{i(\omega t-kx)}+\frac{A}{k}e^{i(\omega t+kx)}=\frac{2A}{k}e^{i\omega t}\cos(kx)$$

Onde stationnaire
Il y a maintenant découplage des variables d'espace et de temps.

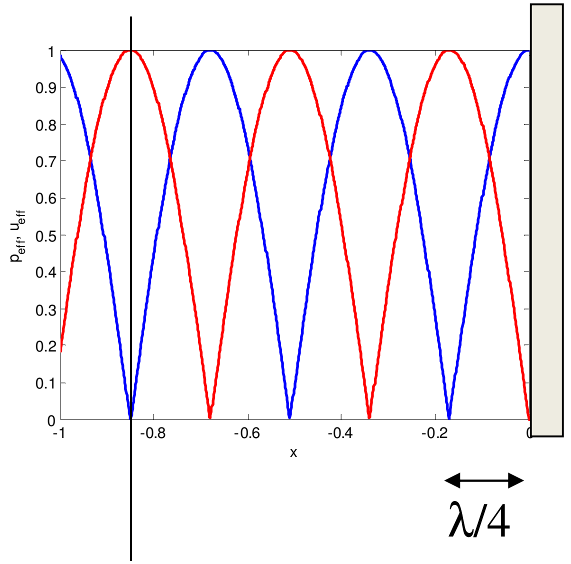
$$u(x;t)=\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial x}\right\}=2A\cos(\omega t)\sin(kx)$$

$$p(x;t)=\mathrm{Re}\left\{-\rho_0\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial t}\right\}=2\rho_0 c_0 A\sin(\omega t)\cos(kx)$$

$$I=\langle pu\rangle=0$$

Les énergies transportées par les ondes incidente et réfléchie se compensent

Max de p à la paroi

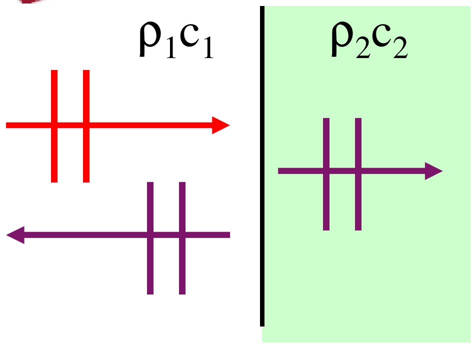


pression

vitesse

Nœuds de pression = ventre de vitesse

3. Réflexion sur une interface entre 2 milieux fluides



Dans le milieu 1 $x < 0$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = c_1^2 \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$$

$$\begin{cases} \phi_1 = f_1(x - c_1 t) + g_1(x + c_1 t) \\ p_1 = \rho_1 c_1 \left[f_1'(x - c_1 t) - g_1'(x + c_1 t) \right] \\ u_1 = f_1'(x - c_1 t) + g_1'(x + c_1 t) \end{cases}$$

Dans le milieu 2 $x > 0$

Causalité

$$\frac{\partial^2\phi_2}{\partial t^2} = c_2^2 \frac{\partial^2\phi_2}{\partial x^2}$$

$$\begin{cases} \phi_2 = f_2(x - c_2 t) + \cancel{g_2(x + c_2 t)} \\ p_2 = \rho_2 c_2 \; f_2'(x - c_2 t) \\ u_2 = f_2'(x - c_2 t) \end{cases}$$

A l'interface $x=0$

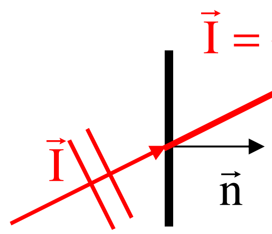
Conditions
1. Contrainte: $p_1=p_2$
2. Vitesse: $u_1=u_2$

$$\begin{cases} f_2'(-c_2 t) = \dfrac{2\rho_1 c_1}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2} f_1'(-c_1 t) \\ g_1'(c_1 t) = \dfrac{\rho_1 c_1 - \rho_2 c_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2} f_1'(-c_1 t) \end{cases}$$

Réflexion sur une interface entre 2 milieux fluides (suite)

Coefficient de transmission

$$\alpha_t \equiv \frac{\langle \text{flux transmis} \rangle}{\langle \text{flux incident} \rangle} = \frac{\langle p_t \vec{u}_t \cdot \vec{n} \rangle}{\langle p_i \vec{u}_i \cdot \vec{n} \rangle} \qquad \alpha_t = \frac{4\rho_1 c_1 \rho_2 c_2}{(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)^2}$$



Coefficient de réflexion

$$\alpha_r \equiv \frac{\langle \text{flux réfléchi} \rangle}{\langle \text{flux incident} \rangle} = \frac{\langle p_r \vec{u}_r \cdot \vec{n} \rangle}{\langle p_i \vec{u}_i \cdot \vec{n} \rangle} \qquad \alpha_r = \frac{(\rho_1 c_1 - \rho_2 c_2)^2}{(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)^2}$$

Commentaires

1. Il y a conservation de l'énergie : $\alpha_t + \alpha_r = 1$
2. Les coefficients α_t et α_r
   - Ne dépendent que de $\rho_1 c_1$ et $\rho_2 c_2$.
   - Indépendants de la fréquence
   - Symétriques en 1 et 2 (même valeur qq soit le sens de parcours)
3. Cas limites:
   - $\rho_1 c_1 = \rho_2 c_2$: $\alpha_t = 1$ et $\alpha_r = 0$ (transmission totale)
   - $\rho_1 c_1 << \rho_2 c_2$: $\alpha_t = 0$ et $\alpha_r = 1$ (réflexion totale)
4. Interface air – eau : $(\rho c)_{air} = 442$, $(\rho c)_{eau} = 1.5e6$ $\alpha_t = 10^{-3}$ ($10 \log \alpha_t = -30$ dB)

4. Matériaux absorbants: Impédance acoustique

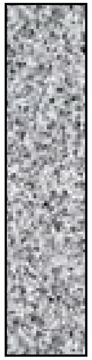
4.1 Position du problème

De façon générale, comment obtient-on les conditions aux limites ?

Milieu acoustique

- Équations MMC
- Lois Comportement

Mouvement linéarisé



Matériau absorbant

- Équations MMC
- Lois Comportement

Mouvement linéarisé

Raccordement: équations de saut

Mouvement Acoustique (x=0) = Mouvement matériau (x=0)

→ **Condition sur le mouvement acoustique**

Pb : **On ne sait pas écrire les équations de la mécanique dans le matériau absorbant! (lois de comportement)**

→
- Modéliser le comportement du matériau
- L'identifier avec l'expérience

ÉCOLE CENTRALE LYON
Gilles Robert

H

4.2 La notion d'impédance acoustique

Linéarité

Le mouvement de la surface est proportionnel à la fluctuation de pression

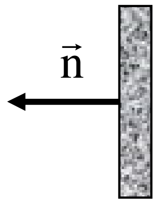
Si l'onde incidente est monochromatique, on peut écrire

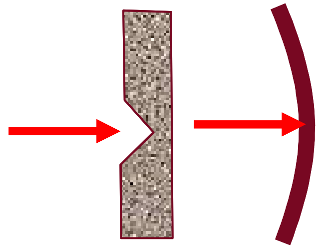
Pression acoustique

$$\tilde{u}_n = \frac{\tilde{p}}{\tilde{Z}_n}$$

Vitesse normale de la surface

Impédance acoustique de la frontière (normale)

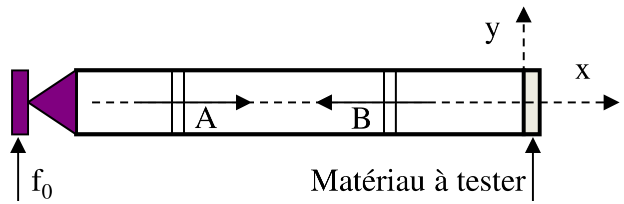




Remarques

1. A priori $Z_n = Z_n$(matériau, fluide, fréquence)
2. Matériau à réaction local
3. Pourquoi cela marche? (Zn est mesurée, loi de comportement d'interface)
4. Z_n comme $\rho_0 c_0$ traduit la réaction du milieu (ici la frontière) à l'onde

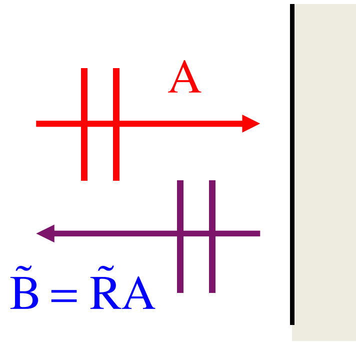
4.3 Mesure de Z_n : le tube de Kundt



Retour sur le pb de réflexion

$$\tilde{p} = A e^{i\omega t}\left(e^{-ikx} + \tilde{R}\, e^{+ikx}\right)$$

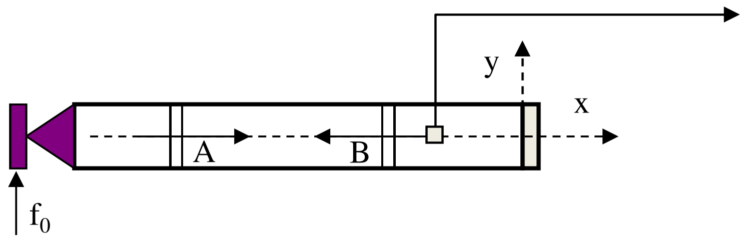
$$\tilde{u} = \frac{A}{\rho_0 c_0} e^{i\omega t}\left(e^{-ikx} - \tilde{R}\, e^{+ikx}\right)$$

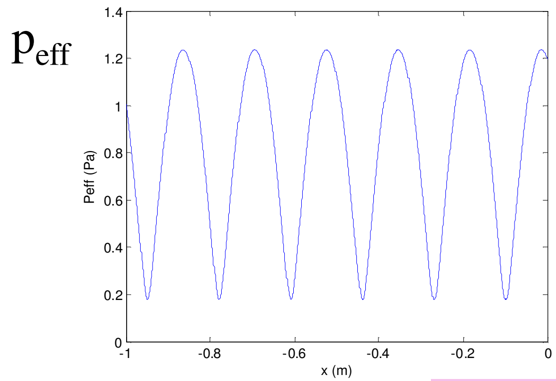


$$Z \equiv \frac{\tilde{p}}{\tilde{u}} = \frac{1+\tilde{R}}{1-\tilde{R}} \rho_0 c_0 \longrightarrow \tilde{R} = \frac{Z/\rho_0 c_0 - 1}{Z/\rho_0 c_0 + 1}$$

Le champ acoustique devant le matériau n'est fonction que du rapport $Z/\rho_0 c_0$

Détermination expérimentale





$$\longrightarrow \tilde{R} \longrightarrow Z$$

Voir Exo 44

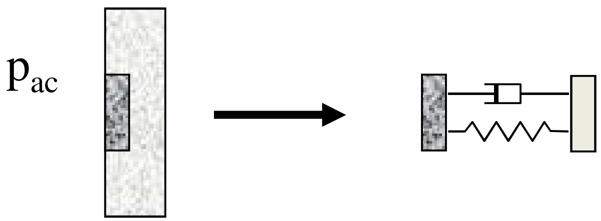
NB, il existe d'autres méthodes

4.4 Interprétation des parties réelle et imaginaire de Z_n

$$\tilde{Z}_n = x + i\,y \equiv \frac{\tilde{p}}{\tilde{u}}$$

Que représente x et y en termes de caractéristiques mécaniques du matériau ?

H Comportement linéaire du matériau



Équation du mouvement

$$M\frac{d^2\xi}{dt^2} + C\frac{d\xi}{dt} + K\xi = p_{acoustique} \qquad \tilde{u} = i\omega\tilde{\xi}$$

Onde monochromatique $\tilde{p} = a\,e^{i\omega t - ikx}$

Solution stationnaire $\tilde{p} = \left[C + i\left(M\omega - \frac{K}{\omega}\right)\right]\tilde{u}$

$$\boxed{Z = \frac{\tilde{p}}{\tilde{u}} = C + i\left(M\omega - \frac{K}{\omega}\right)}$$

x=Re{Z}=C

Représente la force d'amortissement par unité de surface qui résiste au mvt

$$\dot{W}_{\text{fourni par l'onde}} = \langle pu \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T p\,\dot{\xi}\,dt = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\tilde{p}\tilde{u}^*\} = \frac{1}{2}x|u|^2 > 0$$

y=Im{Z} =Mω-K/ω
- Représente la réaction du matériau à l'onde engendrée par la raideur et l'inertie
- Force qui ne dissipe pas d'énergie

Les conditions aux limites : Les principaux messages

L'équation d'onde est une équation différentielle du 2ème ordre en espace. La détermination de la solution nécessite une condition donnée sur toute la frontière du domaine

Les conditions aux limites naturelles (MMC, équation de saut) traduisent la continuité du mouvement (vitesse normale) et des efforts (contrainte) à l'interface.

Les conditions usuelles sont:

- Entre 2 milieux acoustiques
  - continuité de la pression et de la vitesse normale
- Entre un milieu acoustique et un milieu solide
  - Le mouvement du solide est donné
  - L'impédance de surface est donnée
- A l'infini
  - On a la condition de Sommerfeld

Gilles.robert@ec-lyon.fr

36 av. Guy de Collongue
69134 Écully cedex
T + 33 (0)4 72 18 60 00
www.ec-lyon.fr