



Acoustique

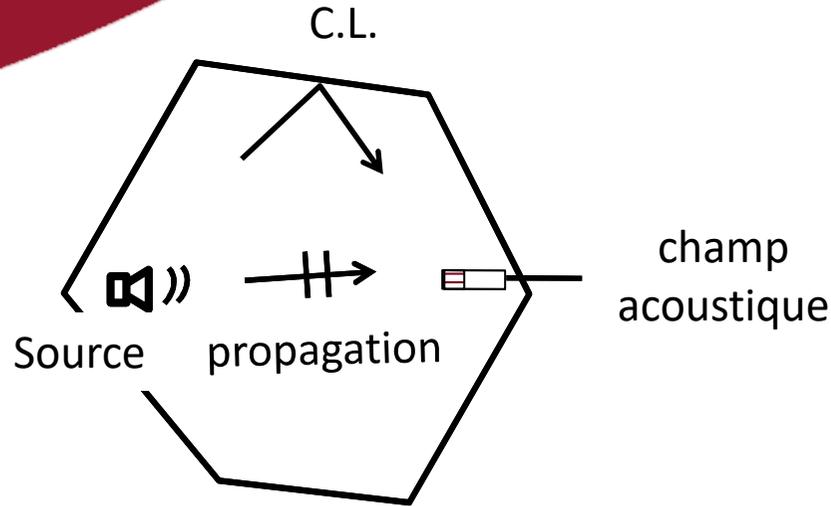
Les sources L'équation d'onde inhomogène

Monopôle
Solution de l'équation d'onde inhomogène
Sources multiples

ECL2022Ac4LesSourcesW



Le problème acoustique

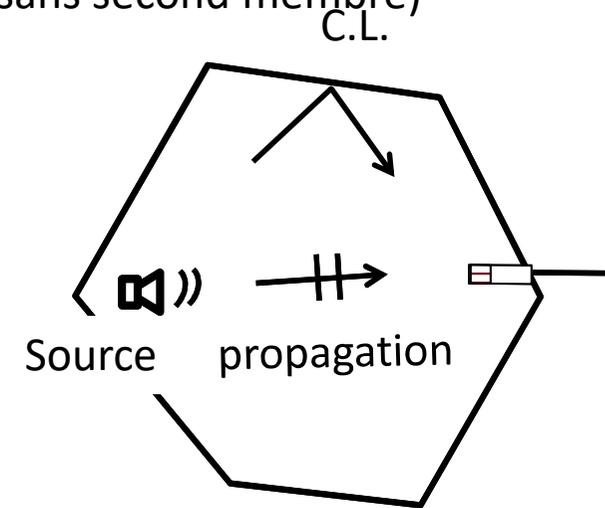


sources	}	→	$\Delta p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = Q'$
éq. onde			
CL			

$$Q' = -\rho_0 \frac{\partial q'}{\partial t} + \text{div} \vec{F}' - \frac{\rho_0 \chi_s^0}{\alpha_s^0 T_0} \frac{\partial r'}{\partial t}$$

On connaît **des** solutions de l'équation d'onde homogène (sans second membre)
 Ondes planes, ondes sphériques
 Elles caractérisent le phénomène de la propagation

On va établir la solution générale de l'équation des ondes avec second membre
 Dans un premier temps on ne tiendra pas compte des CL
On se place en champ libre.



A partir du rayonnement d'une sphère pulsante on va introduire un modèle fondamentale de source : **le monopôle**

On verra ensuite que ce modèle peut être interprété comme une injection de fluide

On en déduira la solution de l'équation d'onde inhomogène en espace libre

On étudiera enfin des systèmes à sources multiples ce qui permettra d'introduire de nombreux concepts et définitions: **Champ proche, champ lointain, directivité, compacité, puissance rayonnée, ...**

1. Retour sur la sphère pulsante

Rappel

- Pulsation harmonique
- Régime stationnaire

$$\tilde{\Phi}(r;t) = -\frac{U_0 a^2}{r(1+ika)} e^{i\omega\left(t - \frac{(r-a)}{c_0}\right)}$$

$$k = \frac{\omega}{c_0}$$



Les caractéristiques du champ acoustique

• La pression $\tilde{p} = -\rho_0 \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} = -\rho_0 i \omega \tilde{\Phi}$

• La vitesse $\tilde{u}_r = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial r} = -ik \left(1 - \frac{i}{kr}\right) \tilde{\Phi}$

• L'intensité $I_r = \langle pu \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}\{\tilde{p}\tilde{u}^*\} = \frac{1}{2} \rho_0 k \omega |\tilde{\Phi}|^2$

Vitesse

Partie champ proche
Partie champ lointain

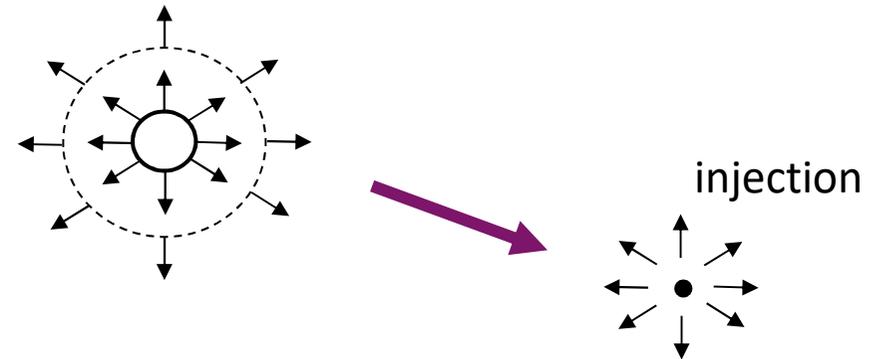
Intensité

Seule la contribution
champ lointain contribue
à l'intensité moyenne

Retenez la démarche

A partir du potentiel acoustique Φ , on détermine les autres grandeurs : la pression, la vitesse, l'intensité

Le changement de volume de la sphère est vu par le fluide environnant comme un apport de fluide, comme une injection de fluide q' .



Calcul du débit injecté, q' , vu par le fluide

$$q'(t) = \int_{\text{Sphère}} u_r dS = 4\pi a^2 u(t)$$

Soit pour un régime harmonique

$$u(t) = \text{Re}\{U_0 e^{i\omega t}\} \quad q'(t) = \text{Re}\{q_0 e^{i\omega t}\}$$

$$q_0 = 4\pi a^2 U_0$$

$$\tilde{\Phi}(r;t) = -\frac{U_0 a^2}{r} \frac{e^{i\omega t - ik(r-a)}}{(1+ika)}$$

Changement
de variable

$$\tilde{\Phi}(r;t) = -\frac{q_0}{4\pi r} \frac{e^{i\omega t - ik(r-a)}}{(1+ika)}$$

Ici on a simplement changé de variable dans l'expression de Φ . On a remplacé U_0 par le débit q_0 .

2. Un modèle de source: Le monopôle

$$\tilde{\Phi}(r;t) = -\frac{q_0}{4\pi r} \frac{e^{i\omega t - ik(r-a)}}{(1+ika)}$$

On fait tendre le rayon de la sphère vers 0 en maintenant le débit constant

$$a \rightarrow 0$$

$$q_0 = \text{Cst}$$

$$\tilde{\Phi}(r;t) = -\frac{q_0}{4\pi r} e^{i\omega t - ikr} \quad (1)$$

Déf

On appelle monopôle une source acoustique dont le champ libre est donné par l'expression (1)

Théoriquement C'est une source ponctuelle de débit

Pratiquement C'est une « petite » sphère pulsante

● $q_0 = 4\pi a^2 U_0 = \text{Cst}$ \longrightarrow $U_0 \nearrow$ Pb! $U_0 \ll c_0$
 $a \rightarrow 0$ (H) Petites perturbations

● a est suffisamment petit $a \ll \lambda$ et $a \ll r$ $\tilde{\Phi}(r;t) = -\frac{q_0}{4\pi r} \frac{e^{i\omega t - ik(r-a)}}{\left(1 + i \frac{2\pi a}{\lambda}\right)}$

Le champ monopolaire est représentatif du champ rayonné par une sphère pour des fréquences pas trop élevées et dans une région pas trop près de la sphère

$$k = \frac{\omega}{c_0} = \frac{2\pi f}{c_0} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Les caractéristiques du champ monopolaire

$$\tilde{\Phi}(r;t) = -\frac{q_0}{4\pi r} e^{i\omega t - ikr}$$

• La pression $\tilde{p} = -\rho_0 \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} = \rho_0 i \omega \frac{q_0}{4\pi r} \exp[i\omega t - ikr]$

Décroissance en 1/r
homnidirectivité

• La vitesse $\tilde{u}_r = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial r} = \frac{q_0}{4\pi r} \left(\frac{1}{r} + ik \right) \exp[i\omega t - ikr]$

Champ proche u_{CP}

Champ lointain u_{CL}

• Densité d'énergie moyenne $\langle \epsilon \rangle = \frac{1}{2} \rho_0 \langle v'^2 \rangle + \frac{1}{2} \chi_s^0 \langle p'^2 \rangle$

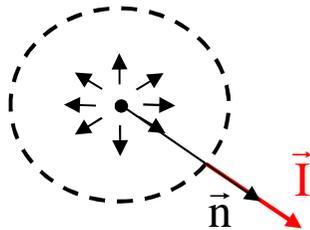
$$\langle \epsilon \rangle = \frac{1}{2} \rho_0 \left(\frac{1}{2} |\tilde{u}_{CP}|^2 + \frac{1}{2} |\tilde{u}_{CL}|^2 \right) + \frac{1}{2} \chi_s^0 \frac{1}{2} |\tilde{p}^2|$$

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{1}{4} \left(\frac{q_0}{4\pi r} \right)^2 \rho_0 \left(\frac{1}{r^2} + k^2 + k^2 \right)$$

• L'intensité $I_r = \langle p u_r \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \tilde{p} (\tilde{u}_{CP}^* + \tilde{u}_{CL}^*) \right\} = \frac{1}{2} \rho_0 \frac{q_0^2}{(4\pi r)^2} \text{Re} \left\{ \frac{i\omega}{r} + k\omega \right\}$

• Puissance moyenne émise

Seul le champ lointain
contribue à l'intensité
moyenne

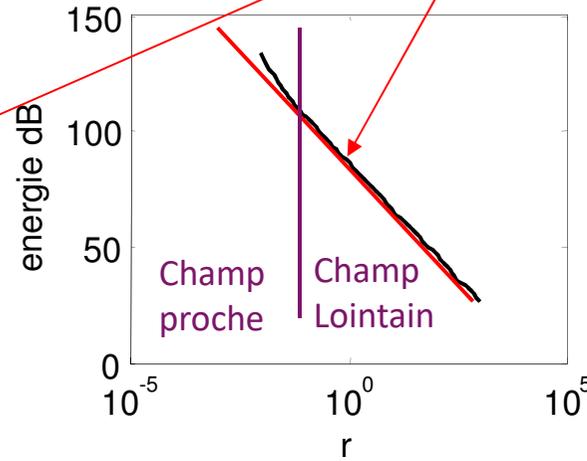
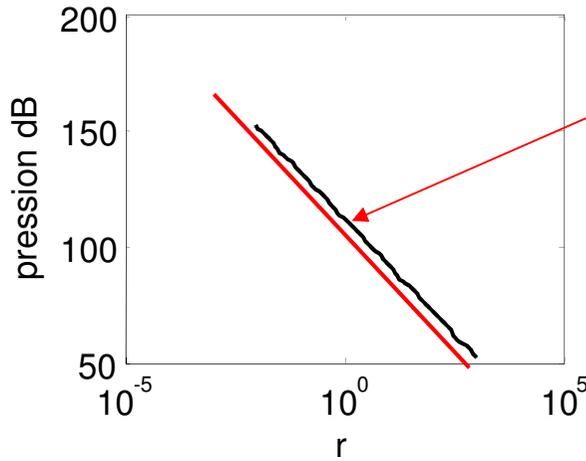


$$P_{ac} = \int_{\text{Sphère}} I dS = \frac{\rho_0 \omega^2 q_0^2}{8\pi c_0}$$

$$I_{\text{monopole}} = \frac{\rho_0 q_0^2 \omega^2}{32\pi^2 r^2 c_0}$$

La puissance moyenne émise ne dépend pas de la surface d'intégration (champ proche ou non)

Pente -20 dB/décade, $1/r^2$



Loin de la source, en champ lointain l'énergie décroît en $1/r^2$.
Près de la source, en champ proche, l'énergie **ne décroît pas** en $1/r^2$

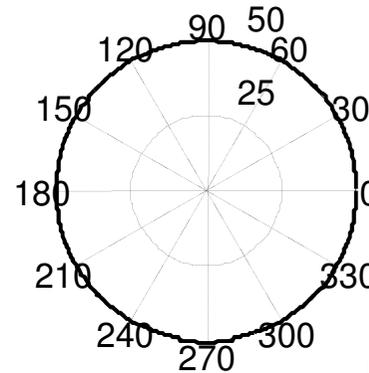
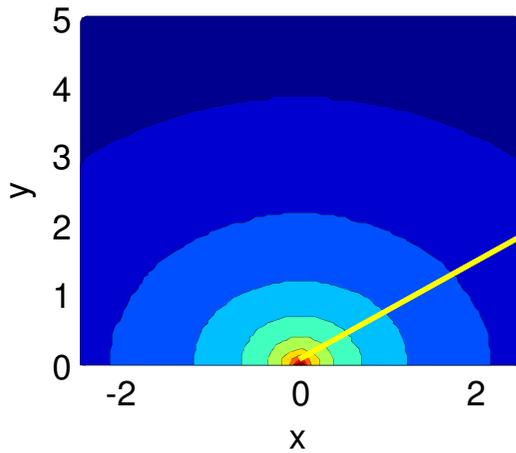


Diagramme de directivité

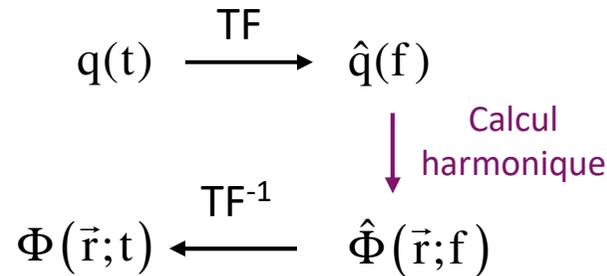
C'est l'évolution de la puissance en fonction de l'angle d'émission.

Ici le rayonnement est omnidirectionnel

Le monopôle non harmonique $q(t)$

Rappel monopôle harmonique
 $q_0 e^{i\omega t} \rightarrow \tilde{\Phi}(r;t) = -\frac{q_0}{4\pi r} e^{i\omega \left[t - \frac{r}{c_0} \right]}$

Rappel du principe



Calcul harmonique

$$\tilde{q}_0 e^{i\omega t} \longrightarrow \tilde{\Phi}(r;t) = -\frac{\tilde{q}_0}{4\pi r} \exp(-ikr) e^{i\omega t}$$

$$\hat{q}(f) \longrightarrow \hat{\Phi}(r;f) = -\frac{\hat{q}(f)}{4\pi r} \exp(-ikr)$$

$$q\left(t - \frac{r}{c_0}\right)$$

Retour à l'espace temporel

$$\Phi(\vec{r};t) = \text{TF}^{-1}[\hat{\Phi}] = \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{\hat{q}(f)}{4\pi r} e^{-ikr} e^{2i\pi f t} df = -\frac{1}{4\pi r} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{q}(f) e^{2i\pi f \left(t - \frac{r}{c_0} \right)} df$$

$$\longrightarrow \Phi(r;t) = -\frac{q\left(t - \frac{r}{c_0}\right)}{4\pi r}$$

On retrouve la même formule que pour le monopôle harmonique

3. Le terme source associé à une injection

Comment se traduit une injection dans le terme source de l'équation des ondes?

• Modification des équation de la MMC

Soit $q(\vec{x}; t)$ un débit volumique de fluide injecté en \vec{x} à t

$$\begin{array}{l} \longrightarrow \text{Éq. masse} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = \rho q \\ \longrightarrow \text{Éq } q^{\text{té}} m^{\text{vt}} \quad \frac{\partial \rho V_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho V_i V_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho q V_i \end{array}$$

• Linéarisation

$$\text{Masse} + p' = c_0^2 \rho'$$

$$\text{Éq } q^{\text{té}} m^{\text{vt}}$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \text{div} \vec{V}' = \rho_0 c_0^2 q$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{V}'}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} p'$$

• Équation d'onde

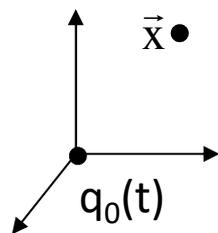
$$\Delta p' - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = -\rho_0 \frac{\partial q}{\partial t}$$

$$\Delta \phi - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = q$$

Le terme source associé au potentiel acoustique peut être interprété comme une injection de fluide en x à l'instant t .

4. Solution de l'équation d'onde inhomogène

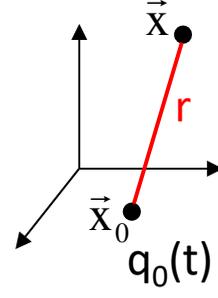
4.1 Un point source à l'origine : le monopôle



$$\Delta\phi(\vec{x};t) - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2\phi(\vec{x};t)}{\partial t^2} = q(\vec{x};t) = q_0(t)\delta(\vec{x})$$

$$\longrightarrow \phi(\vec{x};t) = -\frac{q_0\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c_0}\right)}{4\pi|\vec{x}|}$$

4.2 le point source est en \vec{x}_0



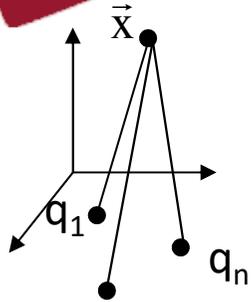
$$\Delta\phi(\vec{x};t) - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2\phi(\vec{x};t)}{\partial t^2} = q(\vec{x};t) = q_0(t)\delta(\vec{x} - \vec{x}_0)$$

$$\longrightarrow \phi(\vec{x};t) = -\frac{q_0\left(t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}_0|}{c_0}\right)}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}_0|}$$



4.3 n points sources en $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$

Gilles Robert

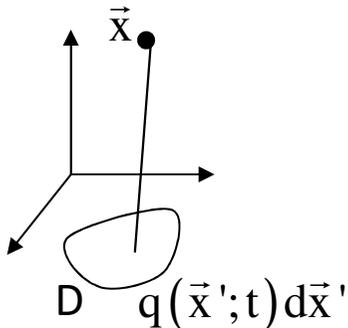


$$\Delta\phi(\vec{x};t) - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2\phi(\vec{x};t)}{\partial t^2} = q(\vec{x};t) = \sum_i q_i(t) \delta(\vec{x} - \vec{x}_i)$$



$$\phi(\vec{x};t) = - \sum_i \frac{q_i \left(t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}_i|}{c_0} \right)}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}_i|}$$

4.4 distribution continue de source



$$\Delta\phi(\vec{x};t) - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2\phi(\vec{x};t)}{\partial t^2} = q(\vec{x};t)$$



$$\phi(\vec{x};t) = - \int_D \frac{q \left(\vec{x}'; t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c_0} \right)}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} d\vec{x}'$$

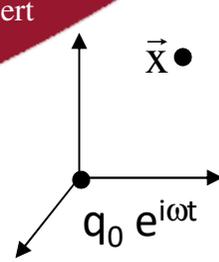
C'est la solution générale de l'équation d'onde en espace libre



4.5 Source Harmonique

CENTRALE LYON

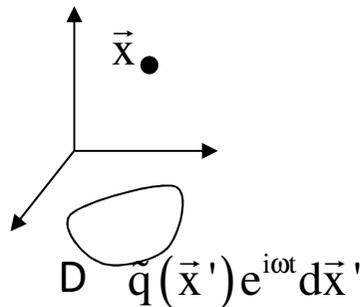
Gilles Robert



$$\Delta \tilde{\phi} + k^2 \tilde{\phi} = q_0 \delta(\vec{x})$$



$$\tilde{\Phi}(\vec{x}; t) = -\frac{q_0 e^{-ik|\vec{x}|}}{4\pi|\vec{x}|} e^{i\omega t}$$



$$\Delta \tilde{\phi} + k^2 \tilde{\phi} = \tilde{q}(\vec{x})$$



$$\tilde{\phi}(\vec{x}; t) = -\int_D \frac{\tilde{q}(\vec{x}') e^{-ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|} d\vec{x}' e^{i\omega t}$$

4.6 Fonction de Green en espace libre (Définition)

Déf

La quantité $G_0(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{e^{-ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}$ est appelée fonction de Green en espace libre

- C'est le potentiel en x créé par une source en x'
- Elle est symétrique en x et x' (principe de réciprocité)

Faisons le point

Dans la 1^{ère} partie de ce chapitre, nous avons établi la solution générale de l'équation d'onde avec second membre. Cela correspond à un problème acoustique général en espace libre et avec sources.

Dans la seconde partie du chapitre, nous allons étudier le champ acoustique induit par une distribution de sources.

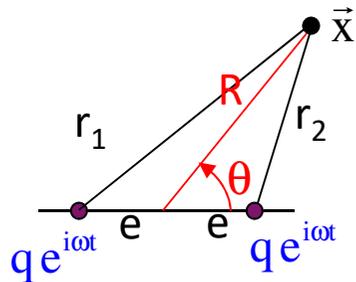
Nous allons introduire et revenir sur certaines notions importantes

- Compacité des sources
- Diagramme de directivité
- Champ proche, champ lointain
- Approximation de champ lointain

5. système de sources multiples

L'objectif de ce paragraphe est d'illustrer l'influence de la taille de la source sur le champ acoustique rayonné. L'étendue de la source est modélisée par 2 monopôles distants de $2e$. Dans un premier temps on suppose que la source « pulse » en phase. Les 2 monopôles sont supposés en phase.

5.1 Deux monopôles en phase



$$\tilde{\Phi}(\vec{x}; t) = -q e^{i\omega t} \left[\frac{e^{-ikr_1}}{4\pi r_1} + \frac{e^{-ikr_2}}{4\pi r_2} \right]$$

La solution est évidente, il suffit d'ajouter les solutions de chacun de monopôle

$$p(\vec{x}; t) = i\omega\rho_0 q e^{i\omega t} \left[\frac{e^{-ikr_1}}{4\pi r_1} + \frac{e^{-ikr_2}}{4\pi r_2} \right]$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{\text{grad}}(\tilde{\Phi}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\tilde{\Phi}_1 + \tilde{\Phi}_2) = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$$

$$= \frac{q e^{i\omega t}}{4\pi r_1} \left(\frac{1}{r_1} + ik \right) e^{-ikr_1} \vec{e}_{r_1} + \frac{q e^{i\omega t}}{4\pi r_2} \left(\frac{1}{r_2} + ik \right) e^{-ikr_2} \vec{e}_{r_2}$$

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{1}{2} \rho_0 \left(\frac{1}{2} |\vec{u}_{\text{total}}|^2 \right) + \frac{1}{2} \chi_s^0 \frac{1}{2} |\tilde{p}_{\text{total}}|^2$$

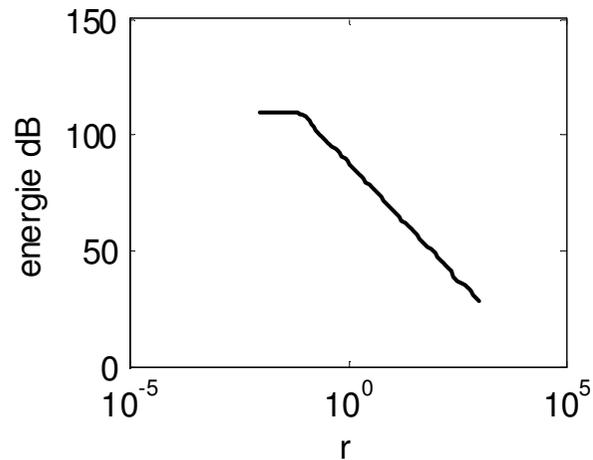
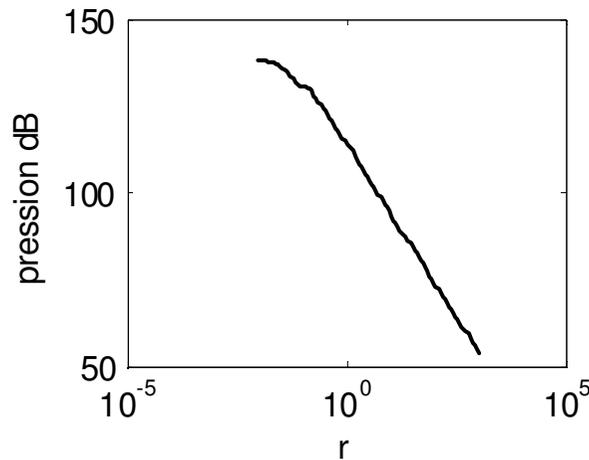


Pour la vitesse c'est une sommation vectorielle des vitesses induites par chacun des monopôles

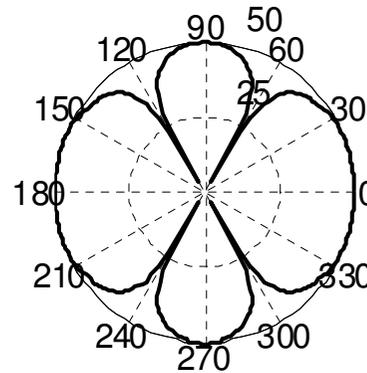
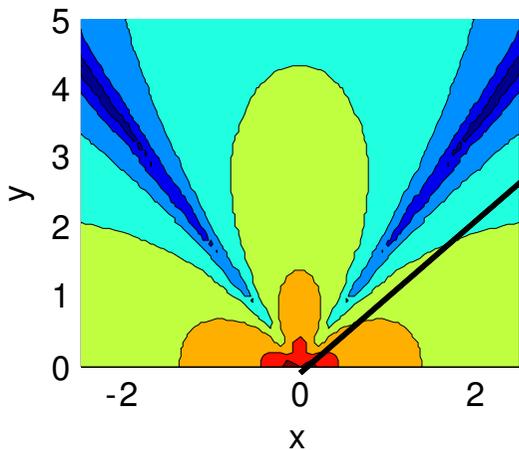


Pour l'énergie on applique la définition. Ce n'est pas la somme des énergies (source corrélées)

2 monopoles en phase, 1700 Hz, 1+1W, $e=0.1$, $ke=\pi$, 45°



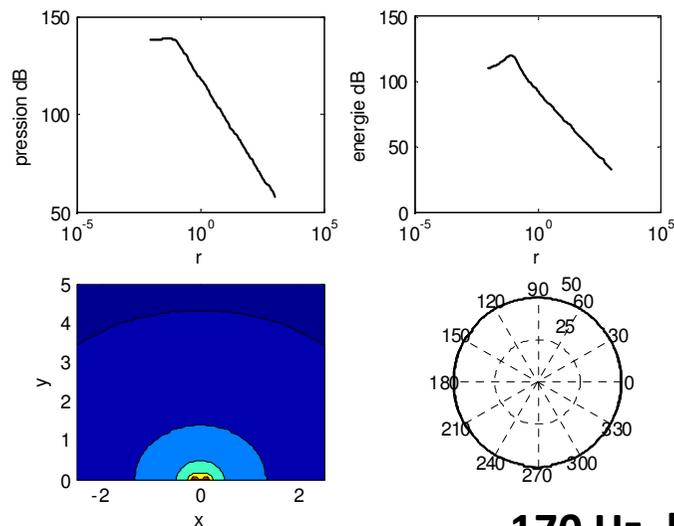
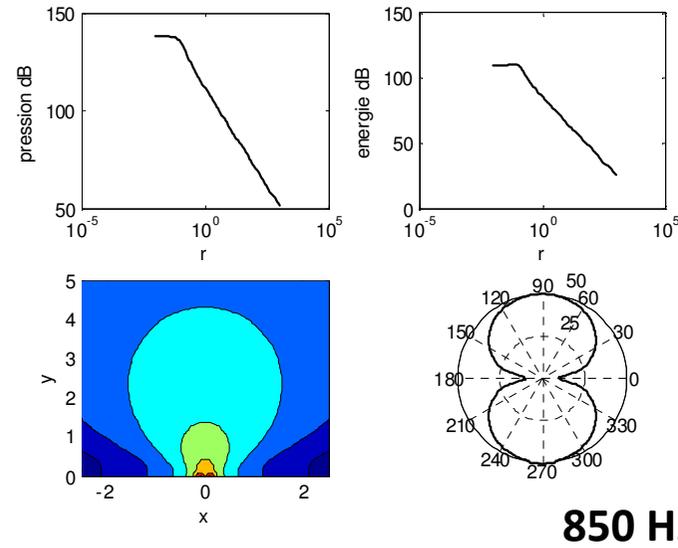
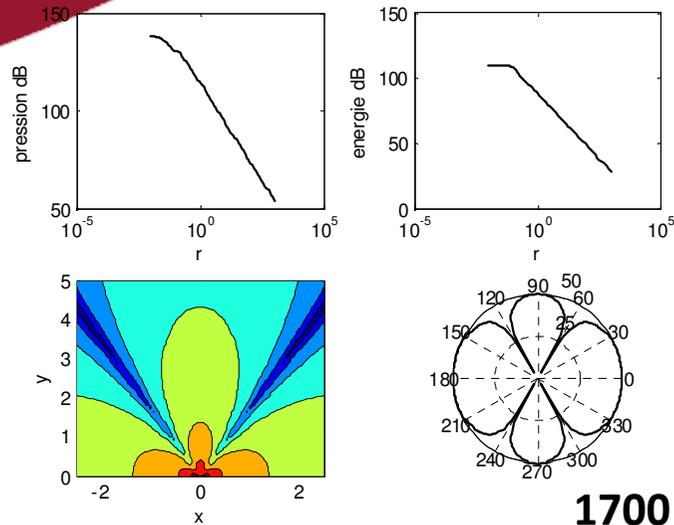
On retrouve les notions de champ proche et de champ lointain, même sur la pression. En champ lointain il y a toujours la décroissance en -20 dB par décade ($1/r^2$)



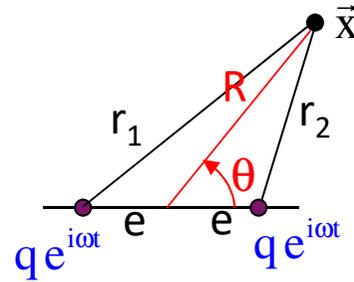
Le champ est plus compliqué. Il y a des interférences. Il y a des zones d'ombre et des directions où le rayonnement est important

2 monopoles en phase, 1+1W, e=0.1, 45°

On diminue la fréquence



- Lorsque l'on diminue la fréquence le champ acoustique se simplifie. Le nombre de lobe de directivité diminue. Le champ est moins directif. A basses fréquences il est même omnidirectionnel.
- Il reste toujours les notions de champ proche et de champ lointain.



Approximation de champ lointain

$$\tilde{\Phi}(\vec{x}; t) = -q e^{i\omega t} \left[\frac{e^{-ikr_1}}{4\pi r_1} + \frac{e^{-ikr_2}}{4\pi r_2} \right]$$

On se place loin de la source, c'est à dire que R devient grand devant la taille de la source 2e. On va faire un développement limité de r₁ et r₂ par rapport à e/R.

$$r_{1(2)} = \left[R^2 + (-)2eR \cos \theta + e^2 \right]^{1/2} \approx R \left[1 + (-) \frac{e}{R} \cos \theta \right]$$

Dans l'expression du champ acoustique, la distance à la source apparaît dans l'amplitude et dans la phase

$$\frac{e^{-ikr_1}}{4\pi r_1} \longrightarrow \frac{e^{-ikR \left[1 + \frac{e}{R} \cos \theta \right]}}{4\pi R \left[1 + \frac{e}{R} \cos \theta \right]} = \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} \frac{1}{\left[1 + \frac{e}{R} \cos \theta \right]} e^{-ike \cos \theta}$$

Dans l'amplitude c'est e/R qui joue

Dans la phase c'est ke (e/λ) qui joue. .

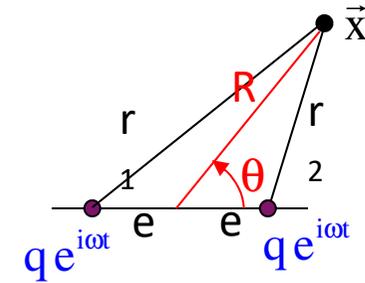
Conclusion: Approximation de champ lointain

Loin de la source (R >> e), en champ lointain on garde l'ordre 0 dans l'amplitude et l'ordre 1 dans la phase.

2 monopôles en phase : Approximation de champ lointain

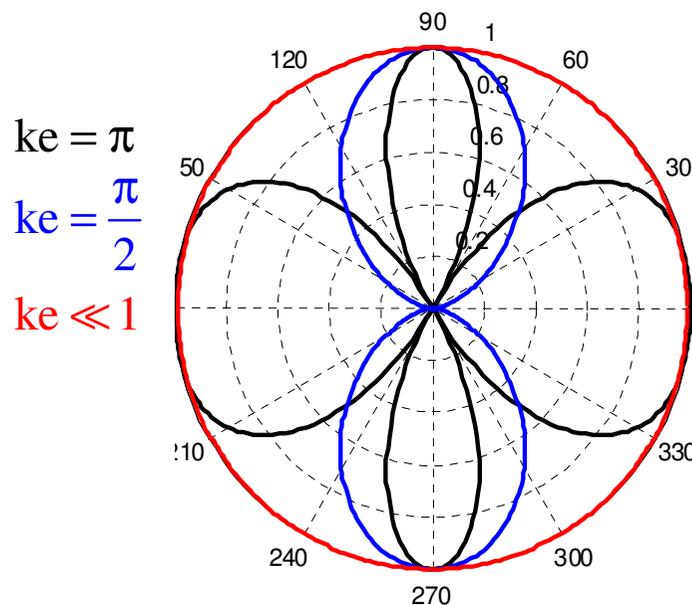
$$\tilde{\Phi}(\vec{x}; t) = -q e^{i\omega t} \left[\frac{e^{-ikr_1}}{4\pi r_1} + \frac{e^{-ikr_2}}{4\pi r_2} \right]$$

$$\tilde{\Phi}(\vec{x}; t) \approx -q e^{i\omega t} \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} \left[e^{ike\cos\theta} + e^{-ike\cos\theta} \right]$$



$$\tilde{\Phi}(\vec{x}; t) \approx -q \frac{e^{i\omega t - ikR}}{4\pi R} 2 \cos(ke \cos\theta)$$

Le champ lointain correspond au champ d'un monopôle pondéré par une directivité



Source compacte $ke \ll 1$ $ke = \frac{2\pi f}{c_0} e = 2\pi \frac{e}{\lambda}$

Si la dimension de la source e est petite devant la longueur d'onde λ , les déphasages sont négligeables entre 2 points de la source. La source « pulse » en bloque et rayonne comme un monopôle.

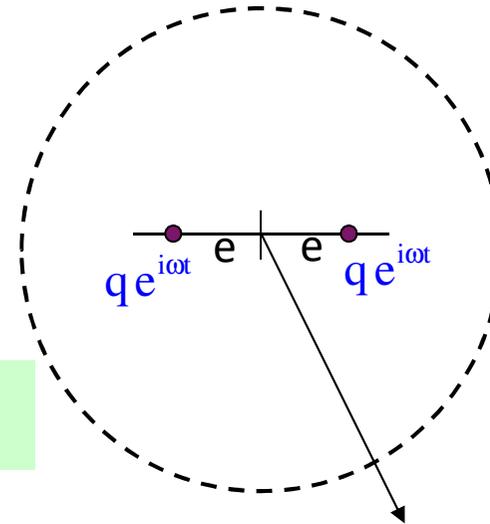
$$\tilde{\Phi}(\vec{x}; t) \approx -2q \frac{e^{i\omega t - ikR}}{4\pi R}$$

Rappel

Pour calculer la puissance rayonnée, il suffit d'intégrer l'intensité normale sur une surface qui entoure les sources.

Démarche

On choisit une sphère, et on se place en champ lointain pour avoir une expression simplifiée du champ.



$$\tilde{\Phi}(\vec{x}; t) \approx -2q \frac{e^{i\omega t - ikR}}{4\pi R} \cos(ke \cos \theta)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{p}(\vec{x}; t) &= -\rho_0 \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} \approx 2\rho_0 i\omega q \frac{e^{i\omega t - ikr}}{4\pi r} \cos(ke \cos \theta) \\ \tilde{u}_r(\vec{x}; t) &= \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial r} \\ &\approx -2q \frac{e^{i\omega t - ikr}}{4\pi r} \cos(ke \cos \theta) \left[-\frac{1}{r} - ik \right] \end{aligned} \right.$$

$$I_r = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \tilde{p} \tilde{u}_r^* \} = \frac{1}{2} \left(\frac{2q\rho_0\omega}{4\pi r} \right)^2 \cos^2(ke \cos \theta) \frac{1}{\rho_0 c_0}$$

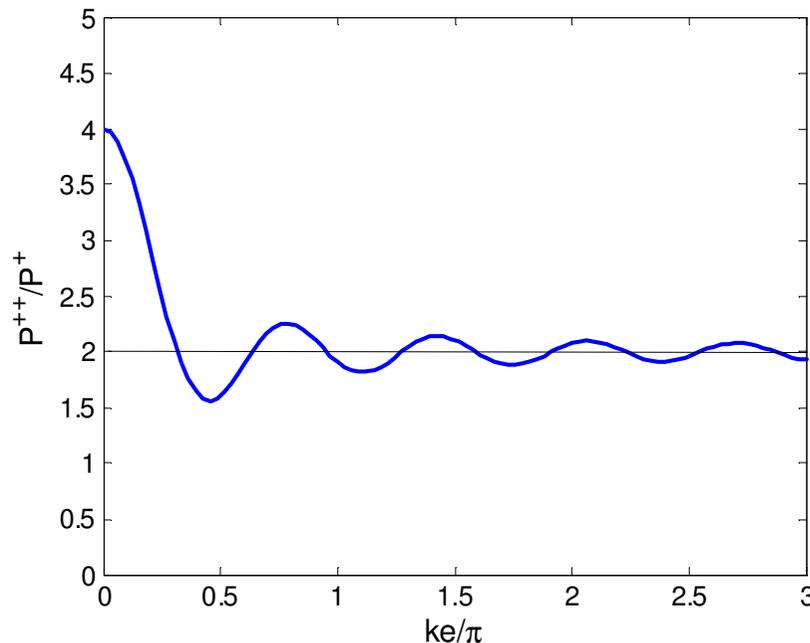
$$P_{ac} = \int_{\text{Sphère}} \vec{I} \cdot \vec{e}_r r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$P_{ac}^{++} = \frac{\rho_0}{c_0} \frac{\omega^2 q^2}{4\pi} \left[1 + \frac{\sin 2ke}{2ke} \right]$$

Rappel Puissance rayonnée par 1 monopôle

$$P_{ac}^{+} = \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{c_0} \frac{\omega^2 q^2}{4\pi}$$

comparaison

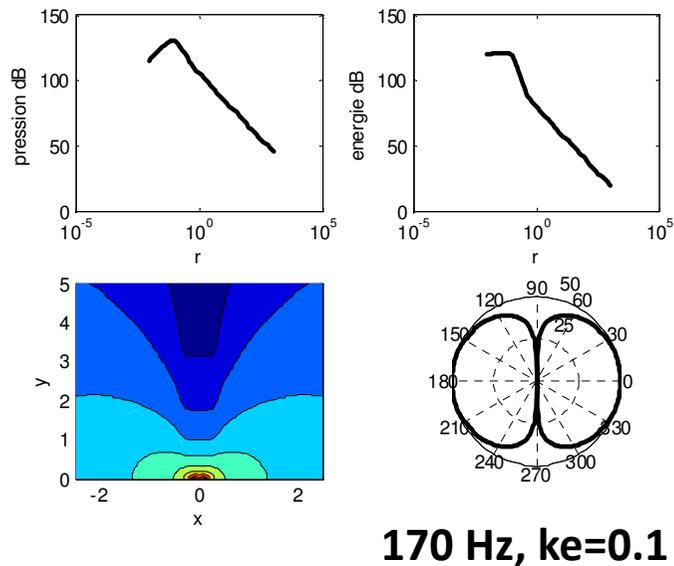
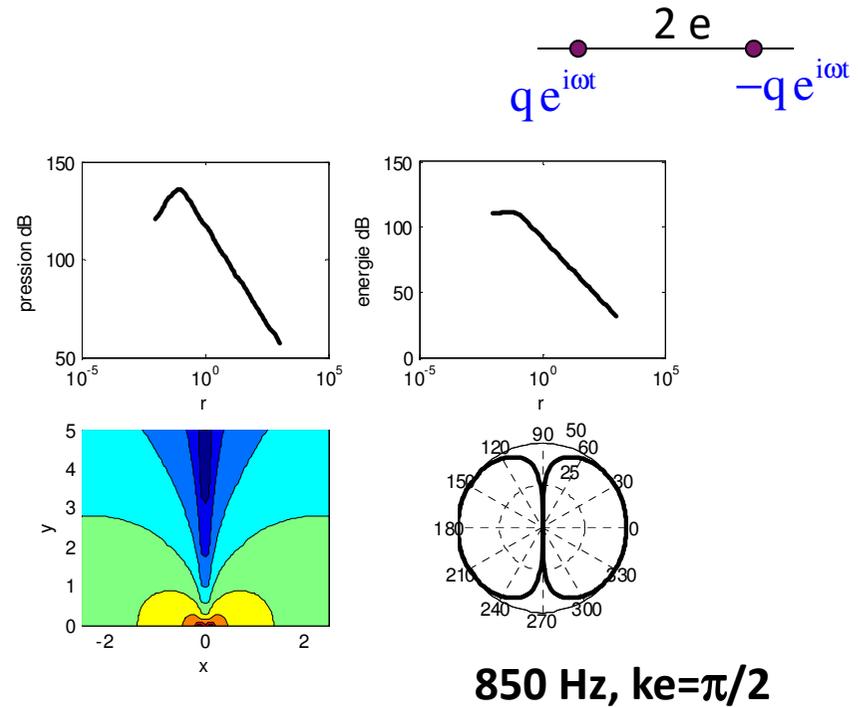
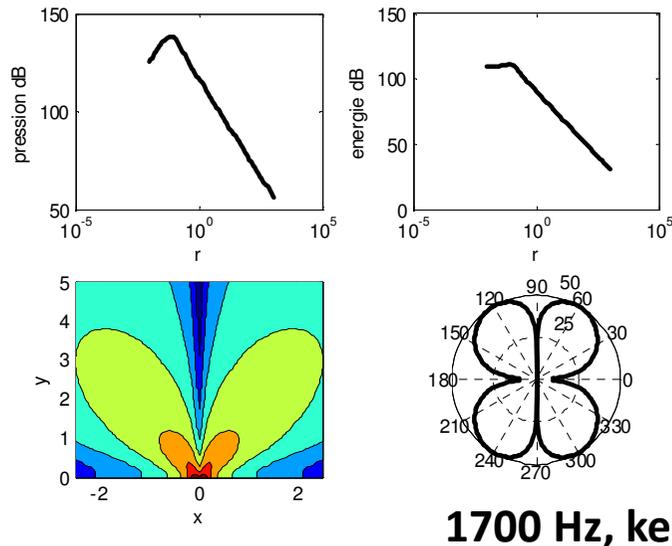


Commentaires

1. $ke \ll 1$, la source est compacte
On retrouve la puissance associée à un monopôle de débit double
2. $ke \gg 1$ Il y a une sorte de compensation entre les 2 monopôles

NB retenir la démarche pour le calcul de la puissance 21

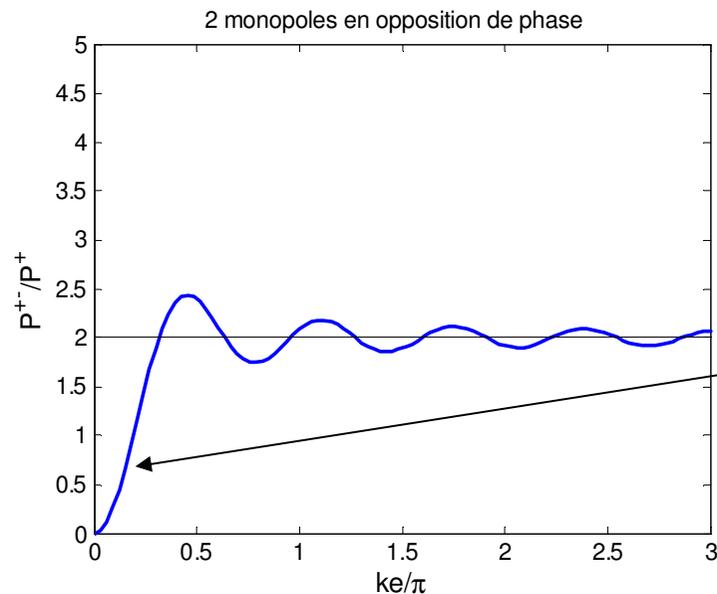
5.2 Deux monopôles en opposition de phase



- On observe toujours les aspects champ proche et champ lointain
- Par contre en BF (ke petit), le champ reste directif. Les phénomènes d'interférences existent toujours

On suit la même démarche (champ lointain)

$$\tilde{\Phi}_{\text{lointain}}(\vec{x}; t) \approx -2q \frac{e^{i\omega t - ikR}}{4\pi R} \sin(ke \cos \theta) \longrightarrow P_{\text{ac}}^{+-} = \frac{\rho_0}{c_0} \frac{\omega^2 q^2}{4\pi} \left[1 - \frac{\sin 2ke}{2ke} \right]$$



- Si $ke \ll 1$ (e petit), On parle de source dipolaire. Les sources sont très proches et s'autodétruisent et la puissance rayonnée tend vers 0.

- Une source dipolaire a une efficacité de rayonnement faible par rapport à une source monopolaire.

Les Sources : Les principaux messages

Je vous laisse faire

A vous de travailler !



Gilles.robert@ec-lyon.fr



36 av. Guy de Collongue
69134 Écully cedex
T + 33 (0)4 72 18 60 00
www.ec-lyon.fr