Acoustique

Solutions élémentaires de l’équation d’onde homogène

Ondes planes
Ondes sphériques

gilles.robert@ec-lyon.fr

ECL2022Ac3SolElementaires

UNIVERSITÉ DE LYON

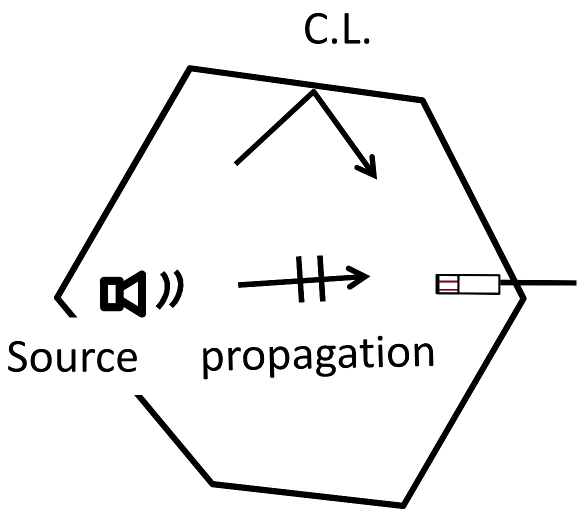
ÉCOLE CENTRALELYON

LABEX CELYA UNIVERSITÉ DE LYON

ÉCOLE CENTRALE LYON
Gilles Robert

Objectif du chapitre

Le problème acoustique



champ acoustique | sources
éq. onde
CL

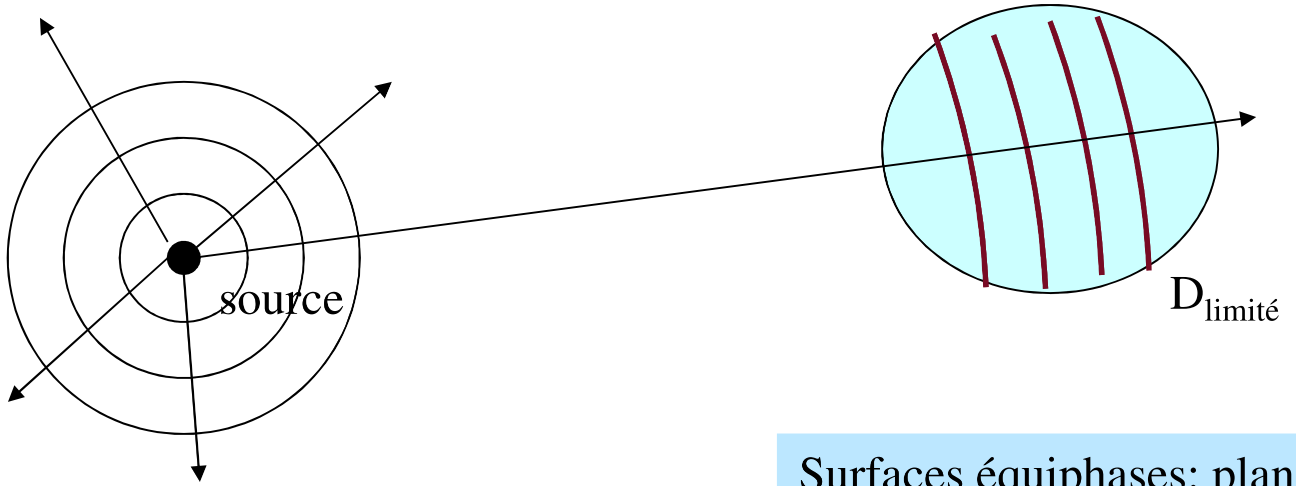
On s'attache dans ce chapitre à l'équation d'onde.
Qu'impose l'équation d'onde à la structure du champ acoustique ?

ÉCOLE CENTRALE LYON

Gilles Robert

Un problème de base :

**Rayonnement d'une source ponctuelle
en espace libre**



Surfaces équiphases: Sphère
p(r;t)
Ondes sphériques

Surfaces équiphases: plans
p(x;t)
ondes planes

1. Ondes planes

Solution monodimensionnelle

$$p'(\vec{x};t) = p'(x,y,z;t) = p'(x;t)$$
$$\vec{v}'(\vec{x};t) = \vec{v}'(x,y,z;t) = \vec{v}'(x;t)$$
$$\rho'(\vec{x};t) = \rho'(x,y,z;t) = \rho'(x;t)$$
$$\Phi(\vec{x};t) = \Phi(x,y,z;t) = \Phi(x;t)$$

Loin de la source, les surfaces équiphases sont des plans, par suite localement les différentes grandeurs ne dépendent que de x et t

1.1. Solution de l 'équation d'onde 1D

On cherche $\Phi(x;t)$ tel que $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi = 0 \Rightarrow$ $\boxed{\Phi(x;t) = f\left(t - \frac{x}{c_0}\right) + g\left(t + \frac{x}{c_0}\right)}$

Commentaires :

- f et g sont deux fonctions quelconques
- f : onde qui se propage vers les x>0
- g : onde qui se propage vers les x<0

On en déduit

$$p' = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\rho_0 (f' + g')$$
$$\vec{v}' = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Phi = \left(-\frac{1}{c_0} f' + \frac{1}{c_0} g'\right)\vec{e}_x$$

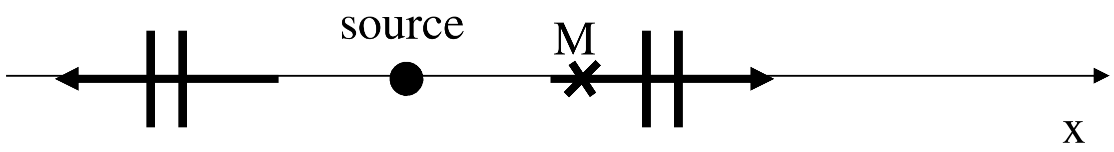
On retiendra

La notion de propagation avec le regroupement des variables d'espace et de temps

La fluctuation de vitesse est alignée avec la direction de propagation

1.2. Impédance acoustique spécifique

En espace libre



En un point M de l'axe il n'y a qu'un type d'onde

A droite, onde progressive, $\Phi=f$ $\quad p'=-\rho_0 f'\ ;\ v'=-\dfrac{1}{c_0}f' \Rightarrow p'=\rho_0 c_0 v'$

A gauche, onde 'régressive', $\Phi=g$ $\quad p'=-\rho_0 g'\ ;\ v'=\dfrac{1}{c_0}g' \Rightarrow p'=-\rho_0 c_0 v'$

Il existe une relation linéaire entre la pression et la vitesse.

$$\frac{p'}{v'}=Z=\pm\rho_0 c_0$$ Impédance spécifique

Commentaires :

- L 'impédance spécifique = f(type d 'onde, milieu)
- Unité Rayl (Kg $m^{-2}s^{-1}$)

	ρ_0	c_0	$\rho_0 c_0$
air	1.3	340	415
eau	10^3	1500	$1.5\ 10^6$

$$\rho_0 c_0=\sqrt{\frac{\rho_0}{\chi_s^0}} \leftarrow \text{Raideur}^{-1}$$

C'est une fonction croissante de la masse et de la raideur du milieu

Pour une onde plane, p et v sont proportionnels $\quad p'=\pm\rho_0 c_0\, v'$

$\rho_0 c_0$ est appelé impédance spécifique du milieu.

En général sa valeur est grande, par suite le mouvement induit par le passage de l'onde **petit**

ÉCOLE CENTRALE LYON
Gilles Robert

1.3. Densité d'énergie et intensité acoustique

$$\Phi(x;t) = f\left(t - \frac{x}{c_0}\right) + g\left(t + \frac{x}{c_0}\right)$$

Rappel : $$e(t) = \frac{1}{2}\rho_0 V^2 + \frac{1}{2}\chi_s^0 p^2$$

Énergie cinétique

Énergie de déformation

Onde plane

$$V^2 = p^2 / (\rho_0 c_0)^2$$

$$\boxed{e(t) = \frac{1}{2}\frac{p^2}{\rho_0 c_0^2} + \frac{1}{2}\frac{p^2}{\rho_0 c_0^2} = \frac{p^2}{\rho_0 c_0^2}}$$

L'énergie acoustique est également répartie entre ses composantes cinétique et de déformation

Vecteur intensité

$$\vec{v}' = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\vec{e}_x + 0 + 0$$

Onde progressive :

$$\vec{i} = p\vec{v} = -\rho_0 f'\left(-\frac{1}{c_0} f' \vec{e}_x\right) = \frac{p^2}{\rho_0 c_0}\vec{e}_x$$

Onde régressive :

$$\vec{i} = -\frac{p^2}{\rho_0 c_0}\vec{e}_x$$

$$\boxed{\vec{i} = \pm\frac{p^2}{\rho_0 c_0}\vec{e}_x} \longrightarrow \boxed{\vec{I} = \langle \vec{i} \rangle = \pm\frac{\langle p^2 \rangle}{\rho_0 c_0}\vec{e}_x}$$

Intensité moyenne

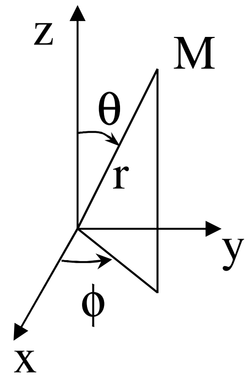
Pour une onde plane, la mesure de $<p^2>$ permet d'atteindre l'énergie moyenne et l'intensité moyenne

2. Ondes Sphériques

On cherche une solution à symétrie sphérique

$$\Phi\left(\vec{x};t\right)=\Phi(r,\theta,\phi;t)=\Phi(r;t)$$

2.1. Solution sphérique de l 'équation d 'onde



$$\Delta\Phi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}$$

$$\Phi(r;t)\longrightarrow\quad\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)-\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=0$$

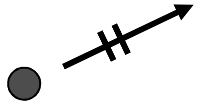
$$\longrightarrow\quad\boxed{\frac{\partial^2(r\Phi)}{\partial r^2}-\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2(r\Phi)}{\partial t^2}=0}$$

Solution générale

$$\boxed{\Phi(r;t)=\frac{1}{r}f\left(t-\frac{r}{c_0}\right)+\frac{1}{r}g\left(t+\frac{r}{c_0}\right)}$$

divergente ↗ ↑ convergente

2.2. Commentaires

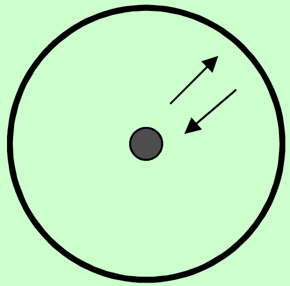


1. Source émettant en espace libre $\Phi = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c_0}\right) + \cancel{\frac{1}{r} g\left(t + \frac{r}{c_0}\right)}$

Principe de causalité
« La cause précède l'effet »
condition de Sommerfeld

2. Source émettant à l'intérieur d'une sphère

On a besoin des 2 ondes !



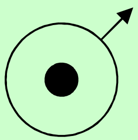
réflexion

3. Amplitude ~ 1/r

Ce résultat est lié au principe de conservation de l'énergie et au fait que les fronts d'onde varient en r^2

4. Singularité à l'origine r=0

Débit volumique de fluide



$$\left.\begin{aligned} Q_v &= 4\pi r^2 V_r \\ V_r &= \partial\Phi/\partial r \end{aligned}\right\} \Rightarrow Q_v = 4\pi r\left[-f'/c_0 + g'/c_0\right] - 4\pi\left[f + g\right]$$

La solution prédit un apport de fluide à l'origine

2.3. Impédance acoustique spécifique

On considère une onde acoustique sphérique divergente

$$\Phi = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c_0}\right) + \cancel{\frac{1}{r} g\left(t + \frac{r}{c_0}\right)}$$

$$\left.\begin{aligned} p' &= -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\rho_0}{r} f' \\ \vec{v}' &= \overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi = \left(-\frac{f}{r^2} - \frac{1}{rc_0} f'\right)\vec{e}_r \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{p'}{V_r} = \frac{\rho_0 c_0}{1 + c_0 f / r f'} \neq Cte$$

La pression et la vitesse associées à une onde sphérique ne sont pas proportionnelles

On a

$$V_r = \frac{1}{\rho_0 r} \int p' dt + \frac{p'}{\rho_0 c_0}$$

Conclusion :

- On ne peut pas définir l'impédance spécifique pour une onde sphérique quelconque
- A l'infini on retrouve le résultat de l'onde plane

  Pour les grandes valeurs de r, le milieu se comporte localement comme une onde plane, mais on conserve la décroissance en 1/r en amplitude. L'onde sphérique n'est assimilable à une onde plane que localement

ÉCOLE CENTRALE LYON
Gilles Robert

On se donne ici la dépendance temporelle donc la fonction f

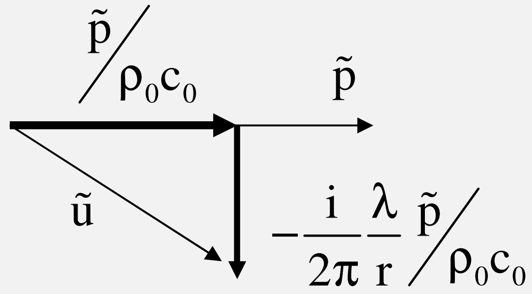
2.4. Cas des ondes harmoniques

Impédance spécifique d'une onde harmonique

On pose $p' = \tilde{p} e^{i\omega t}$ et $v' = \tilde{v} e^{i\omega t}$ avec $\tilde{p}$ et $\tilde{v} \in \mathbf{C}$

$$V_r = \frac{1}{\rho_0 r}\int p'dt + \frac{p'}{\rho_0 c_0} \longrightarrow \tilde{v} = \left(1 - \frac{i}{2\pi}\frac{\lambda}{r}\right)\frac{\tilde{p}}{\rho_0 c_0} \longrightarrow \boxed{Z \equiv \frac{\tilde{p}}{\tilde{v}} = \frac{\rho_0 c_0}{1 - \frac{i}{2\pi}\frac{\lambda}{r}}}$$

Représentation de Fresnel



Z est complexe,
arg(Z) traduit le déphasage entre p et v:
La vitesse est en retard sur la pression

Champ proche, Champ lointain

$$\tilde{v} = \underbrace{\left(-\frac{i}{2\pi}\frac{\lambda}{r}\frac{\tilde{p}}{\rho_0 c_0}\right)}_{\sim\lambda/r^2} + \underbrace{\left(\frac{\tilde{p}}{\rho_0 c_0}\right)}_{\sim 1/r}$$

p~1/r

Si r>>l : Champ lointain $p = \rho_0 c_0 v$
Si r<<l : Champ proche p et v en quadrature

Pour les ondes harmoniques, on peut définir une impédance spécifique, elle est complexe.

La vitesse présente 2 composantes associées aux notions de champs proche et de champs lointain

ÉCOLE CENTRALE LYON
Gilles Robert

2.4. Cas des ondes harmoniques

Energie et intensité moyennes

rappel

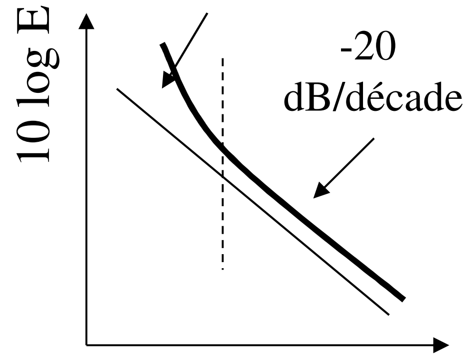
Energie moyenne :

$$E = \frac{1}{2}\rho_0 \langle v^2 \rangle + \frac{1}{2}\chi_s^0 \langle p^2 \rangle$$

L 'onde est harmonique

$$\langle v^2 \rangle = \frac{1}{2}|\tilde{v}|^2 \quad \text{et} \quad \langle p^2 \rangle = \frac{1}{2}|\tilde{p}|^2$$

$$\Rightarrow \quad E = \left[\frac{1}{4}\rho_0 \frac{\left|1 - \frac{i}{2\pi}\frac{\lambda}{r}\right|^2}{\rho_0^2 c_0^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{\rho_0 c_0^2} \right] |\tilde{p}|^2$$



Intensité moyenne : $I = \langle pv \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\tilde{p}\tilde{v}^*\}$

$$I = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{ \left(\frac{i}{2\pi}\frac{\lambda}{r} + 1 \right) \frac{\tilde{p}\tilde{p}^*}{\rho_0 c_0} \right\} = \frac{\langle p^2 \rangle}{\rho_0 c_0}$$

La partie champ proche
ne contribue pas au flux d'énergie
son énergie ne se propage pas

Même relation que pour l'onde plane

La densité d'énergie est plus « importante » près de la source par contre le flux d'énergie est « constant ». Il y a une « concentration » d'énergie prêt de la source qui ne se propage pas

Je vous laisse faire

A vous de travailler !

Gilles.robert@ec-lyon.fr

ÉCOLE CENTRALE LYON

36 av. Guy de Collongue
69134 Écully cedex
T + 33 (0)4 72 18 60 00
www.ec-lyon.fr