Acoustique

Les frontières
Formulation intégrale

La solution générale de l’équation d’onde
avec conditions aux limites

Formulation intégrale
Conditions de Sommerfeld
Fonction de Green

Gilles.robert@ec-lyon.fr

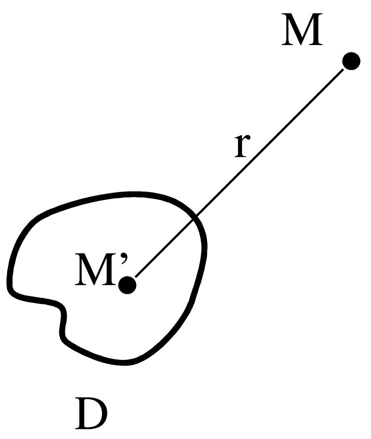
ECL2022Ac6FIntegraleW221101

0. Introduction et objectif

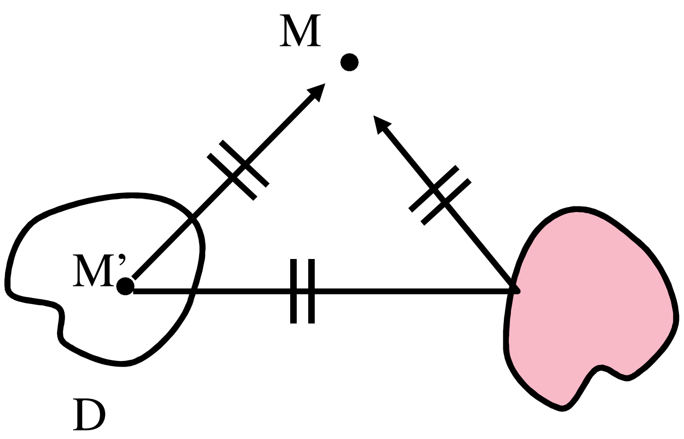
On connaît la solution générale de l'équation d'onde inhomogène en espace libre.

Dans l'espace de Fourier, elle s'écrit:

$$\hat{\phi}(M;f) = \int_D -\frac{e^{-ikr}}{4\pi r}\,\hat{q}(M')\,dM'$$



On rajoute maintenant des bornes à cet espace: solides rigides, vibrantes, absorbantes ….



Comment s'écrit alors la solution ?

Dans ce chapitre nous allons construire la solution générale de l'équation d'onde avec sources et conditions aux limites

ÉCOLE CENTRALE LYON
Gilles Robert

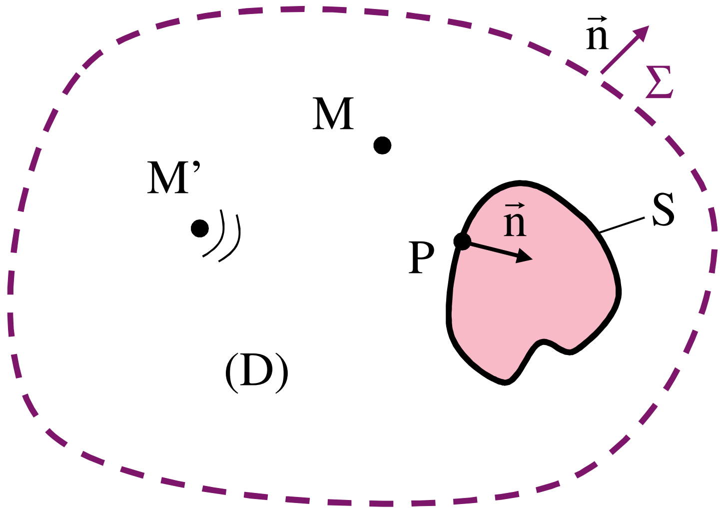
1. Formulation du problème

Milieu fluide

$$\left(\Delta-\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi(M;t)=Q(M;t)$$

$$\xrightarrow{\text{TF}} \quad \boxed{\left(\Delta+k^2\right)\hat{\Phi}(M;f)=\hat{Q}(M;f)}$$

Helmholtz



Les conditions aux limites

Surface vibrante

Continuité des vitesses normales $\quad V_n^{paroi}=V_n^{fluide} \longrightarrow \boxed{\hat{V}_n^{paroi}=\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial n}=N(P)}$

Neuman

Surface absorbante

Impédance de paroi Z $\quad Z=\frac{p}{u_n} \longrightarrow \boxed{Z\frac{1}{\rho_0 i\omega}\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial n}+\hat{\Phi}=0}$

mixte

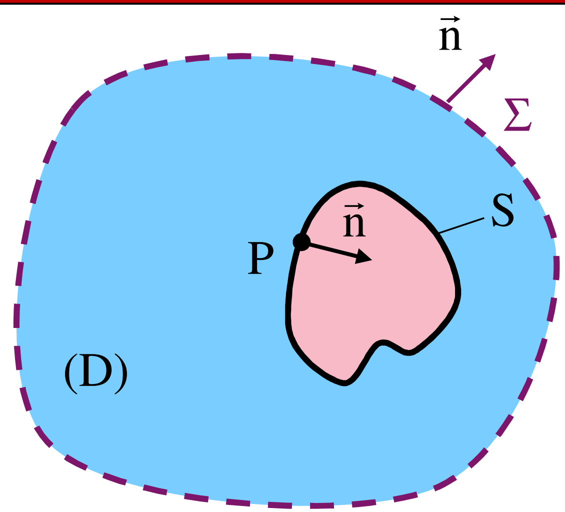
Sur Σ causalité $\longrightarrow$ **Sommerfeld**

$$\boxed{A^d\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial n}+B^d\hat{\Phi}=M^d}$$

La formulation d'un problème acoustique repose sur l'équation d'onde (ou l'équation de Helmholtz), des conditions aux limites de type mixte et éventuellement la condition de Sommerfeld à l'infini.

ÉCOLE CENTRALE LYON
Gilles Robert

2. Théorème de Green et formulation intégrale



2.1 Rappel : Théorème de Green

$$\forall \Phi \Psi \qquad \int_D (\Phi \Delta \Psi - \Psi \Delta \Phi)\, dv = \int_{\partial D} \left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) ds$$

2.2 Rappel: Fonction de Green en espace libre

$$\left(\Delta + k^2\right) G_0 (M, M') = \delta (M - M')$$

$$G_0 (M, M') = -\frac{e^{-ikr}}{4 \pi r}$$

2.3 Formules de Helmholtz - Huygens

$$\left| \begin{array}{l} \left(\Delta + k^2\right) \hat{\Phi} = \hat{Q} \\ \text{CL} \end{array} \right. \qquad \left| \left(\Delta + k^2\right) G_0 = \delta \right.$$

Théorème De Green

Contribution (directe) des sources

Contribution des surfaces S et Σ (champ indirect)

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{\Phi}(M) = & \int_D G_0 (M, M')\, Q(M')\, dM' \qquad \forall M \in D \\ & + \int_{\partial D} \left(\hat{\Phi}(M') \frac{\partial G_0}{\partial n}(M, M') - G_0 (M, M') \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial n}(M') \right) ds_{M'} \end{aligned}}$$

Rq La représentation n’est pas unique.

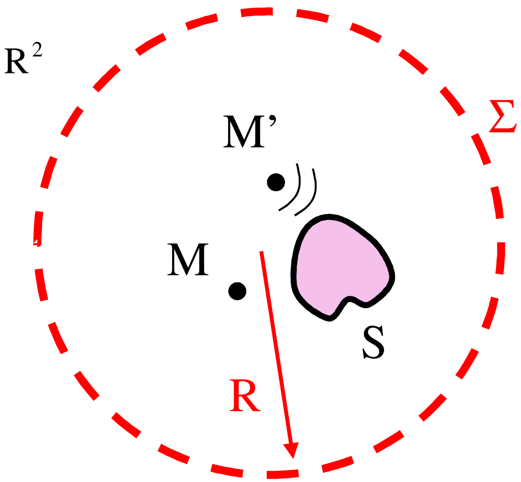
ÉCOLE CENTRALE LYON
Gilles Robert

2.4 Prise en compte de la condition de radiation (Sommerfeld)

En espace infini, le principe de causalité impose que la contribution de l'intégrale sur Σ est nulle si on rejète Σ à l'infini.

$ds \sim R^2$

$$\int_{\Sigma}\left(\hat{\Phi}\frac{\partial G_0}{\partial n}-G_0\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial n}\right)ds \underset{R\to\infty}{\sim} -\frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma}\left(\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial r}-i\,k\,\hat{\Phi}\right)\frac{e^{ikR}}{R}ds$$



Contribution nulle $\longrightarrow$

$$\boxed{\lim_{R\to\infty} R\left|\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial r}-i\,k\,\hat{\Phi}\right|=0}$$

Sommerfeld

$$\forall M\in D \qquad \hat{\Phi}(M)=\int_{D} G_0(M,M')\,Q(M')\,dM'$$
$$+\int_{S+\cancel{\Sigma}}\left(\hat{\Phi}(M')\frac{\partial G_0}{\partial n}(M,M')-G_0(M,M')\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial n}(M')\right)ds_{M'}$$

La condition de Sommerfeld traduit le principe de causalité en espace libre.
Elle permet d'éliminer la contribution de Σ.
(Rq) G_o vérifie la condition de Sommerfeld

2.5 Prise en compte des CL sur S

$$A^d \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial n} + B^d \hat{\Phi} = M^d$$

On introduit maintenant les conditions aux limites sur S

$$\forall M \in D \qquad \hat{\Phi}(M) = \int_D G_0(M,M')\, Q(M')\, dM'$$
$$+ \int_{S+\cancel{\Sigma}} \left(\hat{\Phi}(M') \frac{\partial G_0}{\partial n}(M,M') - G_0(M,M') \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial n}(M') \right) ds_{M'}$$

$$\forall M \in D \qquad \hat{\Phi}(M) = \int_D G_0(M,M')\, Q(M')\, dM' + \int_S -G_0(M,M') \frac{M^d}{A^d}(M')\, ds_{M'}$$
$$+ \int_S \hat{\Phi}(M') \left(\frac{\partial G_0}{\partial n}(M,M') - G_0(M,M') \frac{B^d}{A^d}(M') \right) ds_{M'}$$

Si Φ est connu sur S, Φ est connu partout

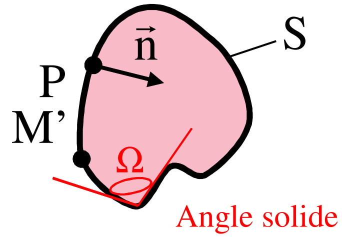
2.6 Calcul de Φ sur S

si $M = P \in S$ Il y a un problème d'intégrale indéfinie

$$\alpha \ \hat{\Phi}(P) = \int_D G_0(P,M')\,Q(M')\,dM' + \int_S -G_0(P,M')\frac{M^d}{A^d}(M')\,ds_{M'} + \int_S \hat{\Phi}(M')\left(\frac{\partial G_0}{\partial n}(P,M') - G_0(P,M')\frac{B^d}{A^d}(M')\right)ds_{M'}$$

$$G_0(P,M') = -\frac{e^{-ikr}}{4\pi\, r}$$

avec $r = PM'$



On montre que l'on a une formule légèrement modifiée

avec $\alpha = 1$ si $M \in V$ $\quad \alpha = 1/2$ ou $1 - \Omega/4\pi$ si $M = P \in S$

Sur S on a $\displaystyle \frac{1}{2}\hat{\Phi}(P) = \int_D G_0\ Q\ dV + \int_S \left(-G_0\frac{M(q)}{A}\right)dS_q + \int_S \hat{\Phi}\left(\frac{\partial G_0}{\partial n} - \frac{B}{A}G_0\right)ds$

$$\frac{1}{2}\hat{\Phi}(P) = f(Q) + \int_S K(P,q)\hat{\Phi}(q)\,ds_q$$

Le calcul du potentiel acoustique sur S conduit à une équation intégrale de Fredholm de 2ème espèce

ÉCOLE CENTRALE LYON

Gilles Robert

Résumé

$$\begin{cases} \left(\Delta + k^2\right)\hat{\Phi} = \hat{Q} & (1) \\ \text{C.L.} : A^d \dfrac{\partial \Phi}{\partial n} + B^d \Phi = M^d & \\ \text{CS} & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\Delta + k^2\right) G_0 = \delta & (1') \\ \text{CS} & (2') \end{cases}$$

1. Théorème de Green: Expression intégrale

$$\boxed{\hat{\Phi} = \int_D G_0\, Q\, dM' + \int_{S+\cancel{\Sigma}} \left(\hat{\Phi} \frac{\partial G_0}{\partial n} - G_0 \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial n} \right) ds_{M'}}$$

2. Condition Sommerfeld: simplification de l'intégrale de surface

3. Conditions aux limites sur S: on élimine la dérivée de Φ, on obtient une équation intégrale

$$\boxed{\alpha \hat{\Phi} = \int_D G_0 Q\, dM' + \int_S G_0 \frac{M^d}{A^d} ds + \int_S \hat{\Phi} \left(\frac{\partial G_0}{\partial n} + G_0 \frac{B^d}{A^d} \right) ds}$$

Conclusion

Stratégie de calcul

1. On calcule le champ sur S en résolvant l'équation intégrale sur S
2. On en déduit le champ dans tout l'espace par une simple intégration

On a ramené un calcul 3D à un calcul 2D

3. Fonction de Green

3.1 Introduction

$$\left|\begin{array}{l}(\Delta+k^2)\hat{\Phi}=\hat{Q} \quad (1)\\ \text{CL}\\ \text{CS} \quad (2)\end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l}(\Delta+k^2)G_0=\delta \quad (1')\\ \text{CS} \quad (2')\end{array}\right.$$

1ère étape
Théorème de Green
+
(1) + (1')

$$\boxed{\begin{aligned}\forall M\in D \qquad \hat{\Phi}(M) &= \int_D G_0(M,M')\,Q(M')\,dM' \\ &+\int_{S+\cancel{\Sigma}}\left(\hat{\Phi}(M')\frac{\partial G_0}{\partial n}(M,M')-G_0(M,M')\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial n}(M')\right)ds_{M'}\end{aligned}}$$

2^d étape (2) + (2')

Fonction G_0 : → Formulation intégrale (3D en 2D)

CS : → Simplification de l'intégrale de surface

Ce type de fonction n'est pas unique. Toute fonction vérifiant (1') peut être employée

→ **Objectif:** Choisir une fonction G permettant de simplifier l'intégrale de surface restante.

3.2 Définition de La fonction de green associée au problème

Le Problème

$$\left(\Delta + k^2\right)\hat{\Phi}(M) = \hat{Q}(M)$$

$$\text{CL}\ \left|\begin{array}{ll} \text{Neuman} & \dfrac{\partial\hat{\Phi}}{\partial n}(q) = N^d(q) \\ \text{Diriclet} & \hat{\Phi}(q) = D^d(q) \\ \text{Mixte} & A^d\dfrac{\partial\hat{\Phi}}{\partial n} + B^d\hat{\Phi} = M^d(q) \\ \text{(CS)} & \end{array}\right.$$

Le problème en G

$$\left(\Delta + k^2\right)G(M,M') = \delta(M - M')$$

$$\text{CL}\ \left|\begin{array}{ll} \text{Neuman} & \dfrac{\partial G}{\partial n_q}(M,q) = 0 \\ \text{Diriclet} & G(M,q) = 0 \\ \text{Mixte} & A^d\dfrac{\partial G}{\partial n} + B^d G = 0 \\ \text{(CS)} & \end{array}\right.$$

Propriétés:

→ Symétrie de G $\quad G(M,M') = G(M',M)$

→ Singularité en M=M' $\quad G(M,M') \underset{M\to M'}{\sim} \dfrac{1}{4\pi\left|\overrightarrow{MM'}\right|}$

3.3 Simplification de l’équation intégrale

H On suppose que G est connue

$$\alpha\,\hat\Phi = \int_D G\,Q\,dV \;+ \int_S \left(\hat\Phi \frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial \hat\Phi}{\partial n} \right) ds$$

Or sur S on a

$$\left| \begin{array}{l} A^d \dfrac{\partial \hat\Phi}{\partial n} + B^d \hat\Phi = M^d \\[2ex] A^d \dfrac{\partial G}{\partial n} + B^d G = 0 \end{array} \right.$$

$$\int_S \; = \int_S \left(\Phi\cancel{(-)}\frac{B}{A} G \boxed{- G\frac{1}{A}(M} - B\cancel{\Phi}) \right) dS$$

Il reste

$$\alpha\,\hat\Phi(M) = \int_D G(M,M')\,Q(M')\,dV_{M'} \;+ \int_S \left(-\frac{1}{A} G(M,M')\,M^d(M') \right) dS_{M'}$$

Expression explicite du champ acoustique

Conclusions

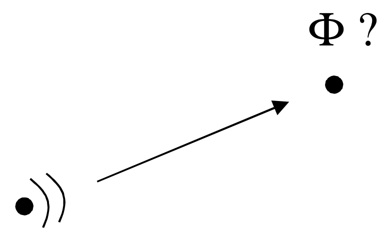
Si on connaît la fonction de Green du pb, la solution est directement déterminée par une intégrale

Si G ne vérifie qu’une partie des CL, on limite d’autant l’intégrale de surface

ÉCOLE CENTRALE LYON
Gilles Robert

3.4 Quelques fonctions de Green

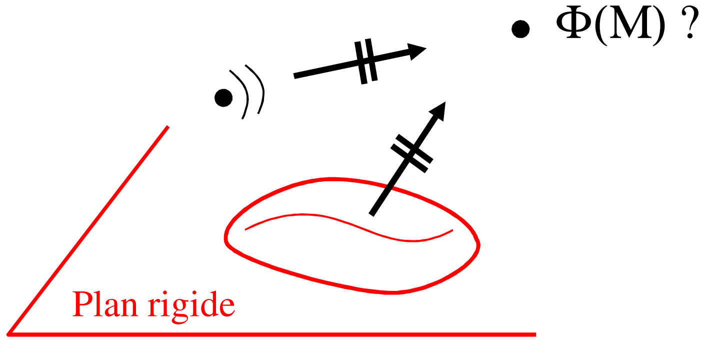
Espace infini



3D : $$G = -\frac{e^{-ikr}}{4\pi r}$$

2D : $$G = \frac{i}{4} H_0^{i}(kr) \underset{r\to 0}{\sim} +\frac{1}{2\pi}\ln r \qquad \underset{r\to\infty}{\sim} -\frac{1}{\sqrt{2\pi k r}}\, e^{-i\left(kr+\frac{\pi}{4}\right)}$$

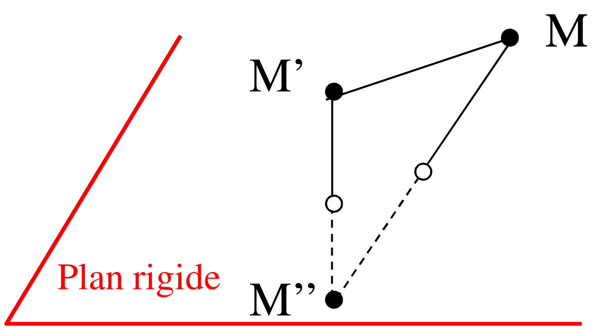
1D : $$G = -\frac{e^{-ikr}}{2ik}$$



Espace semi infini : méthode des images

$$G(M,M') = -\frac{e^{-ik\left|\overrightarrow{MM'}\right|}}{4\pi\left|\overrightarrow{MM'}\right|} - \frac{e^{-ik\left|\overrightarrow{MM''}\right|}}{4\pi\left|\overrightarrow{MM''}\right|}$$

On vérifie facilement $\dfrac{\partial G}{\partial n} = 0$ sur le plan



ÉCOLE CENTRALE LYON
Gilles Robert

4. Résumé

$$\left|\begin{array}{l}(\Delta+k^2)\hat{\Phi}=\hat{Q} \quad (1)\\ \text{C.L.}: A^d\dfrac{\partial\Phi}{\partial n}+B^d\Phi=M^d\\ \text{CS} \quad (2)\end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l}(\Delta+k^2)G_0=\delta \quad (1')\\ \text{CS} \quad (2')\end{array}\right.$$

1. Théorème de Green: Expression intégrale

$$\boxed{\hat{\Phi}=\int_D G_0\,Q\,dM'+\int_{S+\Sigma}\left(\hat{\Phi}\frac{\partial G_0}{\partial n}-G_0\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial n}\right)ds_{M'}}$$

2. Condition Sommerfeld: simplification de l'intégrale de surface

3. Conditions aux limites sur S: on élimine la dérivée de Φ, on obtient une équation intégrale

$$\boxed{\alpha\hat{\Phi}=\int_D G_0Q\,dM'+\int_S G_0\frac{M^d}{A^d}ds+\int_S\hat{\Phi}\left(\frac{\partial G_0}{\partial n}+G_0\frac{B^d}{A^d}\right)ds}$$

4. On introduit LA fonction de green du pb: on obtient une expression explicite du champ

$$\left|\begin{array}{l}(\Delta+k^2)G=\delta\\ \text{C.L.}\;\; A\dfrac{\partial G}{\partial n}+BG=0\\ \text{CS}\end{array}\right.$$

$$\boxed{\alpha\hat{\Phi}=\int_D G\,Q\,dM'+\int_S G\frac{M^d}{A^d}ds}$$

Formulation intégrale

Les principaux messages

Je vous laisse faire

A vous de travailler !

Gilles.robert@ec-lyon.fr

36 av. Guy de Collongue
69134 Écully cedex
T + 33 (0)4 72 18 60 00
www.ec-lyon.fr