



# Acoustique

## Introduction au Rayonnement des Structures Vibrantes

Rayonnement des structures : Formulation intégrale

Structures palnes : Intégrale de Rayleigh

Un exemple: le piston plan

Gilles.robert@ec-lyon.fr

ECL2022Ac7RStructureW



## 0. Objectifs du chapitre

Formaliser le problème et la solution associés au problème du rayonnement d'une structure vibrante

Introduire l'intégrale de Rayleigh pour le cas des structures planes

A partir d'un exemple, le piston plan, introduire les éléments caractéristiques d'un champ acoustique rayonné par une structure vibrante

- La directivité

- La complexité du champ proche

- La notion d'impédance de rayonnement

- Les notions de masse et d'amortissement ajoutés

- La puissance rayonnée et le facteur de rayonnement

# 1. Le problème de Rayonnement

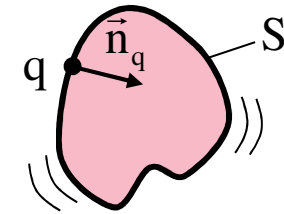
- $\Phi(M)$   
 $p(M)$

Formulation  
en terme  
de potentiel

Éq. Helmholtz  $(\Delta + k^2) \hat{\Phi}(M; f) = 0$

C.L.  $\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial n}(q) = (\hat{V}_n^{\text{paroi}})^{\text{donnée}}(q)$

C.S.  $\lim_{R \rightarrow \infty} R \left| \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial r} - i k \hat{\Phi} \right| = 0$



$\hat{V}_n^{\text{Paroi}}(q; f)$   
est une donnée

Formulation  
en terme  
de pression

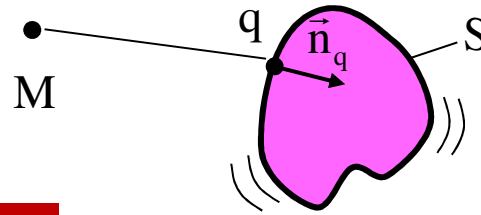
Éq. Helmholtz  $(\Delta + k^2) \hat{p}(M; f) = 0$

C.L.  $\frac{\partial \hat{p}}{\partial n}(q) = -\rho_0 i \omega \hat{V}_n^{\text{paroi}}(q)$

C.S.  $\lim_{R \rightarrow \infty} R \left| \frac{\partial \hat{p}}{\partial r} - i k \hat{p} \right| = 0$

$\hat{p} = -\rho_0 i \omega \hat{\Phi}$

## 2. Formulation intégrale



### 2.1 L'équation intégrale

$$\alpha \hat{\Phi}(M) = \int_S \left( \hat{\Phi}(q) \frac{\partial G_0}{\partial n_q}(M, q) - G_0(M, q) \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial n_q}(q) \right) ds_q$$

Or sur S

$$\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial n}(q) = \hat{V}_n^d(q)$$

$$\alpha \hat{\Phi}(M) = \int_S \left( \hat{\Phi}(q) \frac{\partial G_0}{\partial n_q}(M, q) - G_0(M, q) \hat{V}_n^d(q) \right) ds_q$$

Soit en terme de pression

Équation intégrale

$$\alpha \hat{p}(M) = \int_S \left( \hat{p}(q) \frac{\partial G_0}{\partial n_q}(M, q) + G_0(M, q) \rho_0 i \omega \hat{V}_n^d(q) \right) ds_q$$

avec

$$G_0(M, q) = -\frac{e^{-ikr}}{4\pi r}$$

et  $r = |\overrightarrow{Mq}|$

### Stratégie de résolution

1. On calcule la pression sur S ( $\alpha=1/2$ )
2. On en déduit la pression dans tout l'espace

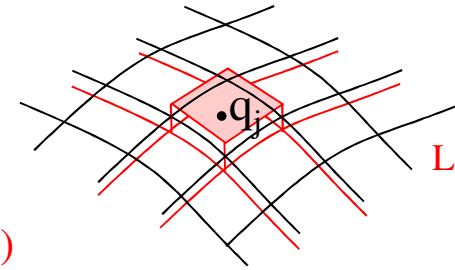
# Principe de la méthode

Gilles Robert

- 1 On divise le domaine d'intégration en éléments de surface  $S_j$   $j=1$  à  $N$
- 2 Sur  $S_j$ , le champ est approché par une fonction d'interpolation  $\phi_j$  de degré  $\pm$  élevé

## 2.2 Résolution: Méthode de collocation

$$\frac{1}{2} \hat{p}(Q) = \int_s \hat{p}(q) \frac{\partial G_0}{\partial n_q}(Q, q) dS_q + \int_s G_0(Q, q) \rho_0 i \omega \hat{V}_n^d(q) dS_q$$



La plus simple  
 $\phi_j = Cte$

$$\hat{p}(q) \approx \sum_{j=1}^N \xi_j \phi_j(q)$$

Relation fonctionnelle en Q

$$\frac{1}{2} \sum_i \xi_i \phi_i(Q) - \sum_j \int_{S_j} \xi_j \phi_j(q) \frac{\partial G_0}{\partial n_q}(Q, q) dS_q = \int_s i \rho_0 \omega \hat{V}_n^d(q) G_0(Q, q) dS_q$$

3  $Q = q_i$   
 $i = 1 \text{ à } N$

$$\frac{1}{2} \xi_i \phi_i(q_i) - \sum_j \xi_j \int_{S_j} \phi_j(q) \frac{\partial G_0}{\partial n_q}(q_i, q) dS_q = \int_s i \rho_0 \omega \hat{V}_n^d(q) G_0(q_i, q) dS_q$$

$$[A][\xi] = [b]$$

Intégrale régulière  
Intégration Gauss Legendre

$$A_{ii} = \frac{1}{2} \phi_i(q_i) - \int_{S_i} \phi_i(q) \frac{\partial G_0}{\partial n_q}(q_i, q) dS_q$$

$$A_{ij} = \int_{S_j} \phi_j(q) \frac{\partial G_0}{\partial n_q}(q_i, q) dS_q$$

Intégrale singulières  
Car  $q_i$  appartient à  $S_i$   
Traitement semi-analytique

### Conclusion

1. La résolution d'une équation intégrale n'est donc pas si difficile que cela. Ici l'équation intégrale est linéaire. On se ramène à un système linéaire à résoudre.
2. Il y a quand même une difficulté ici, ce sont les intégrales singulières à calculer

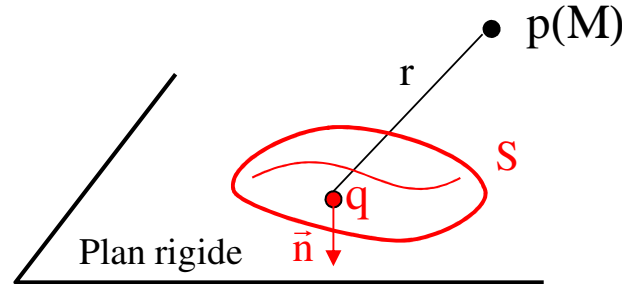
### 3. Rayonnement des structures planes

#### Formule de Rayleigh

Éq. Helmholtz  $(\Delta + k^2) \hat{p}(M; f) = 0$

C.L.  $\frac{\partial \hat{p}}{\partial n}(q) = -\rho_0 i \omega \hat{V}_n^{\text{paroi}}(q)$

C.S.



$$G_0(M, q) = -\frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \longrightarrow \alpha \hat{p}(M) = \int_{\text{Plan}} \left( \hat{p}(q) \frac{\partial G_0}{\partial n_q}(M, q) + G_0(M, q) \rho_0 i \omega \hat{V}_n^d(q) \right) ds_q$$

Équation intégrale

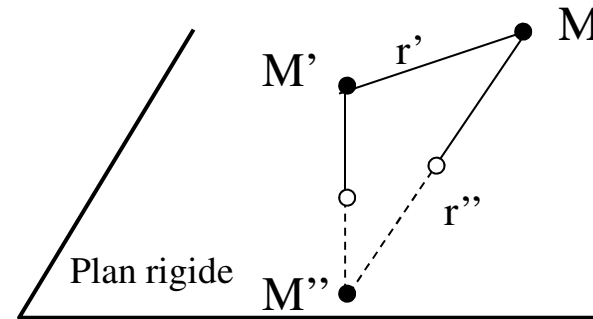
#### Fonction de Green associée au plan

Éq. Helmholtz  $(\Delta + k^2)G(M; M') = \delta(M - M')$

C.L.  $\frac{\partial G(M, q)}{\partial n_q}(q) = 0$

C.S.

$$G(M, M') = -\frac{e^{-ikr'}}{4\pi r'} - \frac{e^{-ikr''}}{4\pi r''}$$



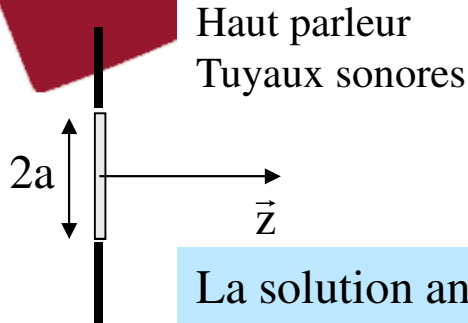
Méthode des images

Sur le plan  $M' = M'' = q \in \text{plan}$   
 $G(M, q) = 2G_0(M, q)$

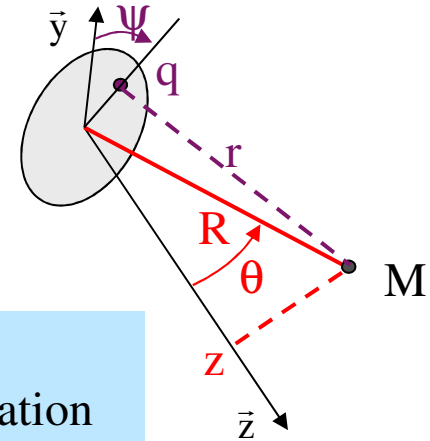
$$\alpha \hat{p}(M) = 2\rho_0 i \omega \int_{S_{\text{vib}}} \left( G_0(M, q) \hat{V}_n^d(q) \right) dS_q \quad \text{Rayleigh}$$

Pour une structure plane baffée, on connaît la fonction de Green du problème. On a donc une expression explicite du champ acoustique!

## 4. Exemple: rayonnement d'un piston plat



$$\hat{p}(M) = 2\rho_0 i\omega V_n \int_{\text{Piston}} \frac{-e^{-ikr}}{4\pi r} dS_q$$



La solution analytique globale n'est pas connue.  
 Bien sur on peut estimer l'intégrale avec une méthode de collocation

### 4.1. Champ lointain: Diagramme de directivité

(H) Champ lointain  $a \ll R$

On néglige les variations de  $r$  dans l'amplitude, mais on en tient compte dans la phase au 1<sup>er</sup> ordre.

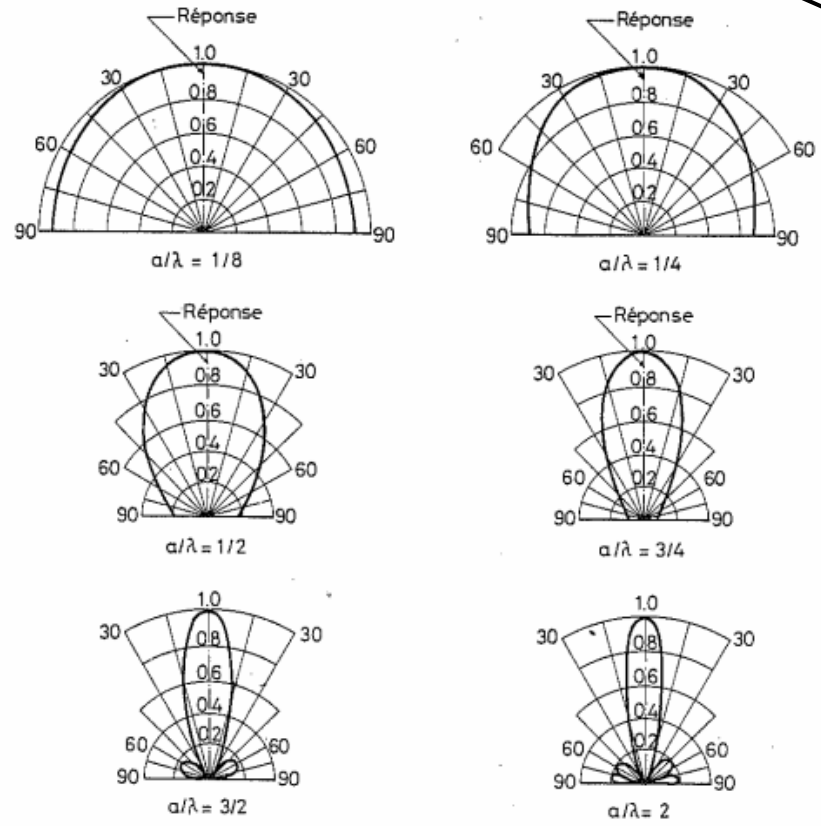
$$p(M) \approx \underbrace{\pi a^2}_{\text{surface}} \underbrace{2i\omega\rho_0 V_n \frac{-e^{-ikR}}{4\pi R}}_{\text{Rayonnement source ponctuelle}} \underbrace{2 \frac{J_1(ka \sin(\theta))}{ka \sin(\theta)}}_{\text{directivité}}$$

Comme pour le cas des 2 monopôles, on retrouve en champ lointain: le champ d'une source ponctuelle (débit =  $\pi a^2 V_n$ ) pondéré par un diagramme de directivité qui dépend de  $ka$

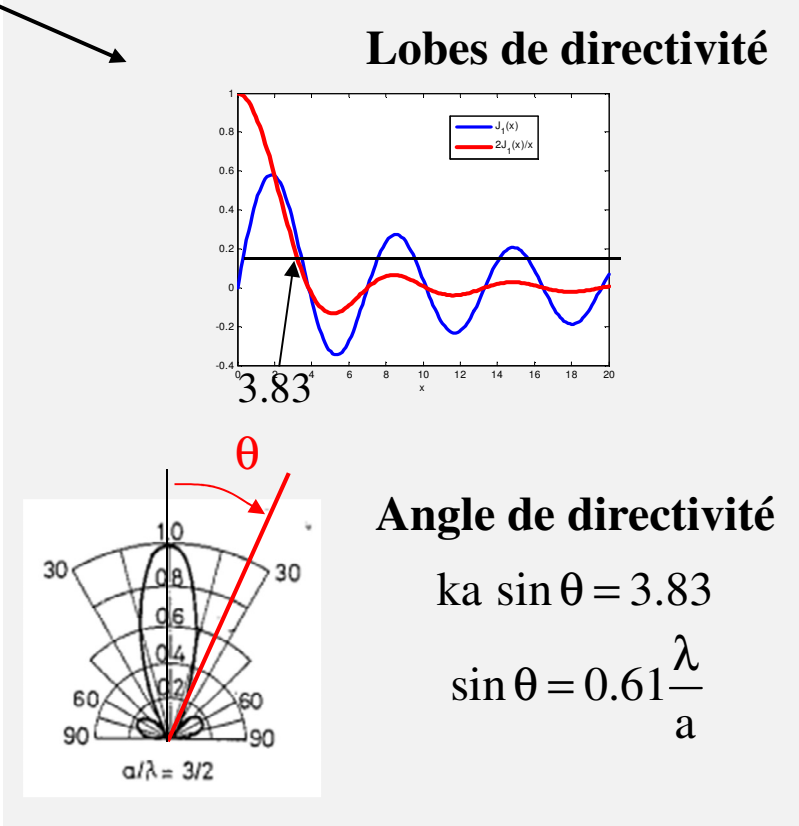


$$p(M) \approx \pi a^2 \cdot 2i\omega\rho_0 V_n \frac{-e^{-ikR}}{4\pi R} \cdot 2 \frac{J_1(ka \sin(\theta))}{ka \sin(\theta)}$$

$ka \ll 1$  Source omnidirectionnelle monopôle  
 $ka \nearrow$  Source devient directive



Directivité du piston plan circulaire dans un baffle rigide infini en fonction de  $a/\lambda$  (champ lointain).



$$ka = \frac{2\pi f}{c_0} a = \frac{2\pi}{\lambda} a$$

AcExo069.m

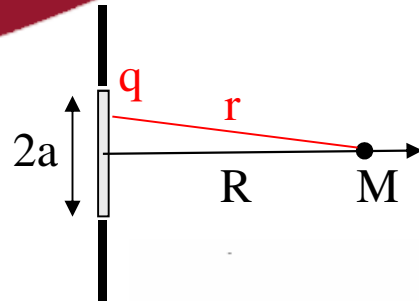
Comme d'habitude, lorsque la fréquence augmente ou plus précisément lorsque le rapport  $ka$  augmente, le diagramme de directivité se complexifie et la source devient plus directive.

De plus, ici le piston reste plan, la source est en phase, pour les basses fréquences (petits  $ka$ ) le rayonnement est omnidirectionnel, la source est compacte.

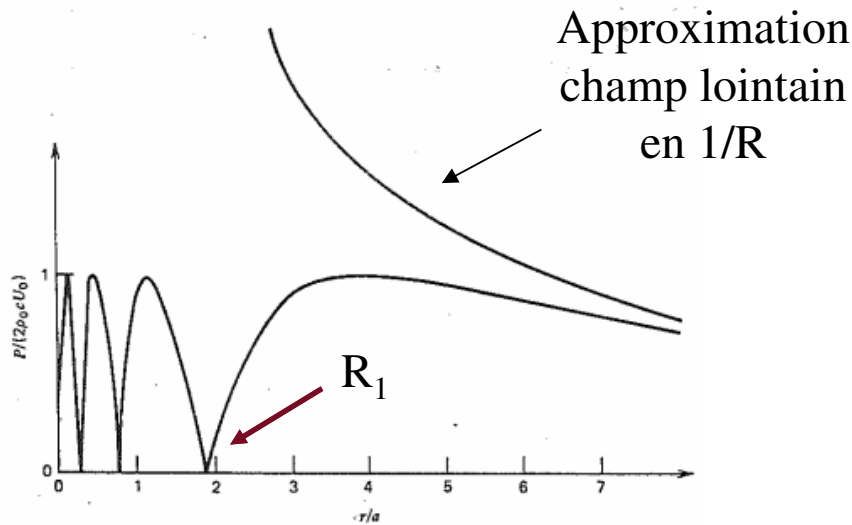


4.2. Complexité du champ proche

On connaît une expression analytique du champ sur l'axe



$$p(M) = \frac{i\omega\rho_0 V_n}{k} e^{-i\frac{k}{2}(\sqrt{R^2+a^2}+R)} \times 2\sin\left[\frac{k}{2}(\sqrt{R^2+a^2}-R)\right]$$



On-axis response of a circular plane piston with  $a/\lambda = 4$ .

Les Zéros

Nombre de zéro =  $a/\lambda$

Si  $a < \lambda$   $R_1 < 0$  pas de zéros

Si  $a \gg \lambda$   $R_1 \approx \frac{a^2}{2\lambda}$

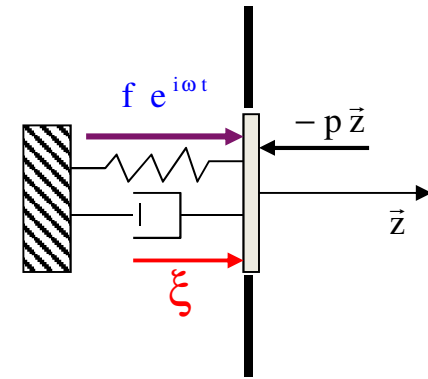
Le champ proche peut être compliqué. Plus la fréquence augmente plus la longueur d'onde diminue plus le champ proche est épais et plus il est complexe (phénomène d'interférence)

On se place maintenant du point de vue du piston et on regarde l'influence de l'émission sur la vibration du piston

Equation de vibration du piston

Régime établi !

$$-m\omega^2\xi + i\omega C\xi + K\xi = fe^{i\omega t} + F_{\text{fluide} \rightarrow \text{piston}}$$



Force qui s'exerce sur le piston

$$\vec{F}_{f \rightarrow p} = \int_{\text{piston}} -p(q) dS_q \vec{z}$$

$$\hat{p}(q) = 2 \times 2\rho_0 i\omega V_n \int_{\text{Piston}} \frac{-e^{-ikr}}{4\pi r} dS_Q$$

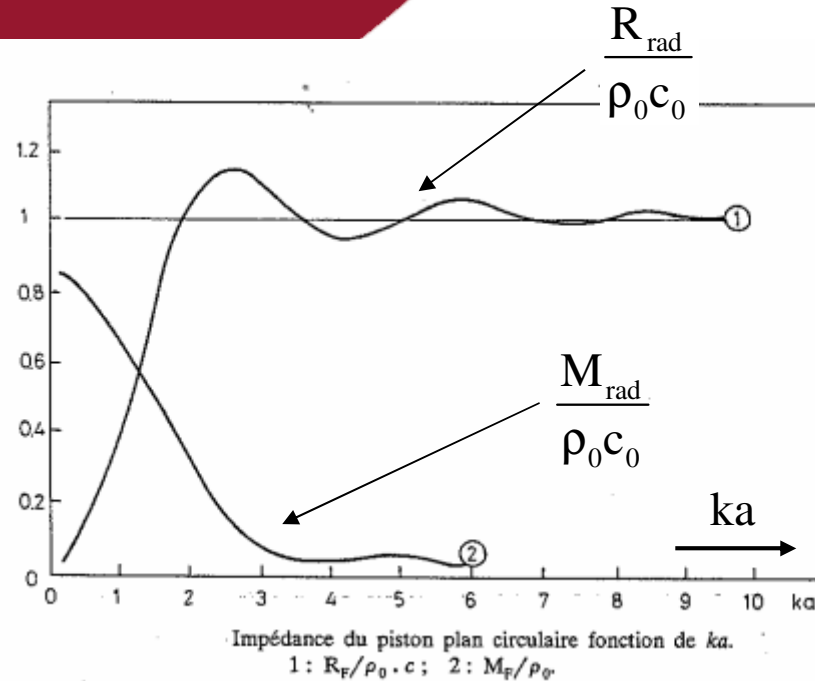
$\uparrow$   
 $-i\omega\xi$

$$F = \frac{\omega^2 \xi \rho_0}{\pi} \iint_{\text{Piston} \times \text{Piston}} \frac{-e^{-ikr}}{r} dS_Q dS_q$$

Fonction de Struve

Impédance de rayonnement

$$Z_{\text{rad}} \equiv \frac{F}{\text{Surface} \times V_n} \equiv R_{\text{rad}} + i\omega M_{\text{rad}} = \rho_0 c_0 \left[ 1 - \frac{J_1(2ka)}{ka} - \frac{i}{ka} S_1(2ka) \right]$$



$$Z_{\text{rad}} \equiv R_{\text{rad}} + i\omega M_{\text{rad}} = \rho_0 c_0 \left[ 1 - \frac{J_1(2ka)}{ka} - \frac{i}{ka} S_1(2ka) \right]$$

### Commentaires

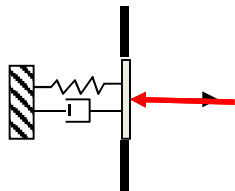
$$Z_{\text{rad}} \sim \rho_0 c_0 \quad Z_{\text{rad}} = Z_{\text{rad}}(ka)$$

$$ka \rightarrow \infty \Rightarrow Z_{\text{rad}} \rightarrow R_{\text{rad}} \rightarrow \rho_0 c_0$$

$$ka \rightarrow 0 \Rightarrow R_{\text{rad}} \rightarrow 0$$

Pas de rayonnement  
Effet de masse ajoutée

### Retour sur l'équation de vibration



$$-m\omega^2\xi + i\omega C\xi + K\xi = fe^{i\omega t} + (R + i\omega M)(-i\omega\xi)$$

$$-(m + M)\omega^2\xi + i\omega(C + R)\xi + K\xi = fe^{i\omega t}$$

Masse ajoutée

Amortissement ajouté  
Énergie perdue par rayonnement

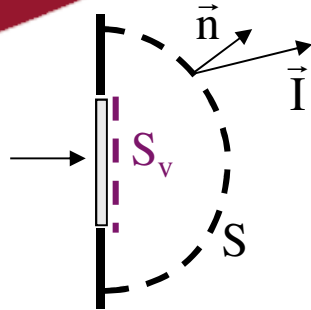
### Conclusion

Du point de vue de la structure vibrante la présence du rayonnement acoustique se traduit par

- Un effet de masse ajoutée (important en BF, petit  $ka$ )
- Un effet d'amortissement ajouté (important en HF, grand  $ka$ )

## 4.4. Puissance rayonnée: facteur de rayonnement

Cas du piston bafflé



$$P_{ac} = \int_S \vec{I} \cdot \vec{n} dS = \int_{S_v} \vec{I} \cdot \vec{n} dS$$

$$\text{Sur } S_v \quad \vec{I} \cdot \vec{n} = \langle p V_n \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \{ p V_n^* \}$$

$$\text{donc} \quad P_{ac} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \left( \int_{S_v} p dS \right) V_n^* \right\} = \frac{1}{2} \text{Re} \{ F V_n^* \}$$

$$F = Z S V_n$$

$$P_{ac} = \text{Re} \{ Z \} \times \text{Surface} \times \frac{1}{2} |V_n|^2 = R_{rad} \text{ Surface } V_{eff}^2$$

### Conclusion

$P_{ac}$  est proportionnelle au carré de la vitesse vibratoire

$P_{ac}$  est proportionnelle à la surface vibrante

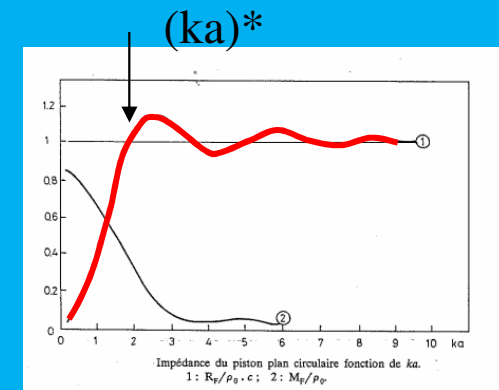
$$R_{rad} = \rho_0 c_0 \left[ 1 - \frac{J_1(ka)}{ka} \right] = \rho_0 c_0 \sigma(ka)$$

$\sigma_{rad}$  est appelé facteur de rayonnement, c'est une fonction de  $a/\lambda$

En BF la puissance rayonnée est faible, voir nulle, lorsque la fréquence augmente la puissance augmente d'un coup à partir d'une fréquence particulière et tend vers une valeur assez bien définie

$$P_{ac} = \rho_0 c_0 \text{ Surface } V_{eff}^2$$

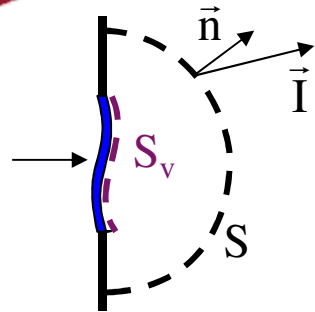
### Facteur de rayonnement



$$ka > (ka)^* \Rightarrow \sigma \approx 1$$

$$ka \ll (ka)^* \Rightarrow \sigma \approx 0$$

Cas général : le piston non plan



$$P_{ac} = \int_{S_v} \vec{I} \cdot \vec{n} dS = \int_{S_v} \frac{1}{2} \text{Re} \{ p(Q) V_n^*(Q) \} dS$$

$$p(Q) = 2 \times \int_{S_v} 2i\rho_0 c_0 k V_n(q) \frac{-e^{-ikr}}{4\pi r} dS_q$$

$$P_{ac} = \rho_0 c_0 \iint_{S_v \times S_v} 4k \text{Re} \left\{ i \frac{-e^{-ikr}}{4\pi r} \frac{1}{2} V_n(q) V_n^*(Q) \right\} dS_Q dS_q$$

$$P_{ac} = \rho_0 c_0 \sigma(ka) \times \text{Surface} \times \langle V_{eff}^2 \rangle_{\text{Surface}}$$

Facteur de rayonnement

Moyenne surfacique  
de la  $V_{vibratoire}$

$P_{ac}$  est donc proportionnelle à  $\langle V_{eff}^2 \rangle_{\text{Surface}}$   
et à la surface

Le facteur de proportionnalité rend compte  
de la répartition de la vibration sur la  
surface. On ne peut pas dire que  $\sigma$  est  
associé à une structure. Il dépend aussi de  
l'excitation.

Par contre on sait que en BF  $\sigma$  est nul et en  
HF  $\sigma$  vaut 1.

$$\sigma(k, \text{répartition spatiale vibration}) = \sigma(\lambda_{ac}, \lambda_{vib})$$

$$\sigma = f(\text{vibration}) = f(\text{structure, forces excitatives})$$

$$\exists \left( \frac{\lambda_{vib}}{\lambda_{ac}} \right)^* \text{ critique}$$

$$\frac{\lambda_{vib}}{\lambda_{ac}} > \left( \frac{\lambda_{vib}}{\lambda_{ac}} \right)^* \Rightarrow \sigma \approx 1$$

$$\frac{\lambda_{vib}}{\lambda_{ac}} \ll \left( \frac{\lambda_{vib}}{\lambda_{ac}} \right)^* \Rightarrow \sigma \approx 0$$

# Rayonnement des structures: les principaux messages

Le champ acoustique rayonné par une structure quelconque nécessite la résolution d'une équation intégrale.

La résolution d'une équation intégrale n'est pas si compliquée (méthode de collocation)

Le champ acoustique rayonné par une structure plane est fourni par une formule explicite : l'intégrale de Rayleigh.

Champ lointain, le champ est celui d'une source ponctuelle pondéré par une directivité

Directivité augmente et se complexifie avec la fréquence

Le champ proche peut être complexe et son épaisseur augmente avec la fréquence

Notion de charge fluide

Puissance rayonnée

BF: nulle

$$\text{HF: } P_{\text{ac}} \sim \rho_0 c_0 \text{ Surface } \langle V_{\text{eff}}^2 \rangle_S$$

Gilles.robert@ec-lyon.fr



36 av. Guy de Collongue  
69134 Écully cedex  
T + 33 (0)4 72 18 60 00  
www.ec-lyon.fr